第1章 数和几何

1.1 实数系

阅读本书必须熟悉实数系，应当掌握实数的基本代数运算和由数的大小顺序导出的不等式。本节着重叙述数系中人们不大熟悉的一些性质。

首先介绍数系的基本代数性质，并进而引进实数系的全部性质。设R是实数集。

A. 域公理 实数集R有如下两种运算：第一种运算是加法运算，对R内的每一对元素x、y，有R内的一个元素$x+y$与它对应；第二种运算是乘法运算，对R内每一对元素x、y，有R内的一个元素xy与它对应。这两种运算具有以下性质：

1．加法是可交换的，即对R内的每一对元素x、y，有

$$x+y=y+x.$$

2．加法是可结合的，即对R内的一切x、y和z，有

$$(x+y)+z=x+(y+z).$$

3．在R内有唯一元素0（零），使得对于R内的一切x，有$x+0=x$。

4．对R内每一个元素x，R内存在唯一的元素$-x$，满足

$$x+(-x)=0.$$

5．乘法是可交换的，即对R内一切x和y，有

$$xy=yx.$$

6．乘法是可结合的，即对R内一切x、y和z，有

$$(xy)z=x(yz).$$

7．在R内存在唯一的元素1（单位元素），使对R内一切x，均有 $x1=x$。

8．对R内每一个非零元素x，R内有唯一元素x^{-1}（或$\frac{1}{x}$）满足$xx^{-1}=1$。

9．$1\neq 0$。

10．对R内的一切x、y和z，乘法在加法上是可分配的：

$$x(y+z)=xy+xz.$$

B．顺序公理 在R上存在一种关系$<$，叫做小于，具有性质：

1．如果x和y在R内，那么下面的三个关系式

$$x<y;\quad x=y;\quad y<x$$

有一个且只有一个成立。

2．$x<y$ 等价于$0<y-x$。

3．如果$0<x$和$0<y$，则$0<(x+y)$，并且$0<xy$。

C．完备公理 如果S和T是R的非空子集，满足

(i) $R=S\cup T$；

(ii) 如果对S内的每个s和T内的每个t，有$s<t$，则在集S内有最大数，或在集T内有最小数，这两件事中必有一件是成立的。

上述性质通常可概括为，实数集对于它的加法、乘法和顺序来说，(A) 它是一个域，(B)它是有序的，(C)按顺序它是完备的。简言之，实数系是完备的有序域。

从域公理（A），我们可导出以后将要用到的各种代数关系。然而，我们不想这样做。而是使用不加说明的基本恒等式，如二项式定理

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k},$$

或几何级数的公式

$$1-x^{n+1}=(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n).$$

从公理可定义**正整数集**

$$Z_+=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\},$$

它是由数1，1+1，1+1+1，…组成的集。然后我们可证明**数学归纳法**：

如果S是R的一个子集，使得

(a) $1\in S$；

(b) 如果$x\in S$则$(x+1)\in S$，

则S必包含每一个正整数。我们还可以定义**整数集**

$$Z=\{\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\},$$

和**有理数集**

$$Q=\left\{\frac{m}{n};\ m\in Z,\ n\in Z_+\right\}.$$

并验证

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq},$$

等等。或许(逻辑上)我们可以进行这些推导，然而这将是耗费时间的，而且对于理解分析实际上又无任何帮助。

类似地可以从顺序公理(B)(容易地)建立几个不等式。如果$x<y$，则$x+z<y+z$；如果$x<y$并且$0<c$则$cx<cy$。$x\leqslant y$意味着$x<y$或$x=y$。$x<y$也可写成$y>x$。数x的**绝对值**定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & \text{如果 } x\geqslant 0,\\ -x, & \text{如果 } x<0.\end{cases}$$

绝对值具有性质：

$$|xy|=|x|\,|y|,$$

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|,$$
$$|x-y|\geqslant|x|-|y|.$$
这些不等式我们不证了。

现在有理由提出这样的一个问题，是否可以不从公式 (A), (B), (C) 出发推导实数系的各种性质？为什么要选中这些特殊性质，并由它们出发来决定实数系？这有两个主要原因。

第一，分析学立足于数的概念，所以我们必须清楚地阐明什么是实数系。实数系的本质基于如下两个定理：(i) 存在一个完备的有序域；(ii) 任何两个这样的域是同构的，即在两个域的数之间存在一个一一对应关系，这种对应关系保持加法、乘法和顺序运算。选中 (A), (B) 和 (C) 的第二个原因是这样做能帮助我们理解完备性 (C)。而实数系的完备性和关于它的种种表示是本分析学的主要内容。

我们不打算证明实数系的存在和唯一性。我们假定读者掌握了有序域的计算而对数系的完备性并不熟悉，在后面的两节中可以看到完备性的实质。现在我们将先说明什么是完备性。

直观上，性质 (C) 表明，如果把实数想象为直线上的点，那末这直线是没有空隙的。我们怎样才能把“直线” R 分成两个非空集合 S 与 T 的并集，使得在 S 内的每一个数均小于在 T 内的任一数呢？只有一种方法可以实现，即在某一点分割直线，把它分割成两段。设 S 是其中的一段，而 T 是另一段，当然，这分点本身必须放在 S 内或者 T 内。从而分点必是 S 内的最大数或者是 T 内的最小数。

确切地说，假定选择任一实数 c，以 c 为分点，我们得到含于公理 (C) 的两种略有不同的分割：

$$S=\{s\in R;\ s\leqslant c\},$$
$$T=\{t\in R;\ t>c\},$$

或

$$S=\{s\in R; s<c\},$$

$$T=\{t\in R; t\geq c\}.$$

在第一个类型，S 中有最大数，在第二个类型，T 内有最小数。完备性表明，除此以外，再无其它可能出现。

例 1　考察有理数系 Q，它由一切有理数组成，其中加法、乘法和顺序均与 R 中一样。因为有理数的和、差、积、商仍是有理数，在公理(A)中，用 Q 代替 R，域公理是满足的。同样，Q 满足顺序公理(B)。因此，有理数系是有序域。然而，它并不是完备的。很早以前，古希腊人就注意到(粗略地说)有理数集有空隙，例如，点 $\sqrt{2}$ 就是空隙。更正确地说，他们证明了，不存在有理数 x 满足 $x^2=2$。这意味着在点 $\sqrt{2}$ 处分割有理数集将显示出 Q 不是完备的。这是由于集 $S=\{s\in Q; s<\sqrt{2}\}$ 没有最大数而集 $T=\{t\in Q; t>\sqrt{2}\}$ 也没有最小数。下面我们描述这一情况，但并不提到 $\sqrt{2}$。

假如定义

$$S=\{s\in Q; s<0 \text{ 或 } 0\leqslant s, \text{ 且 } s^2<2\},$$

(1.1)

$$T=\{t\in Q; 0<t \text{ 并且 } t^2>2\}.$$

显然 S 和 T 是 Q 的非空子集，并且 S 内的任一数均小于 T 内的每一个数。重要的是，在 Q 内不存在 x 满足 $x^2=2$，但是有

$$Q=S\cup T.$$

T 有最小数吗？令 $t\in T$，则 $t^2>2$。取 r 是一个十分小的正有理数，使它满足 $(t-r)^2>2$ (以及 $t-r>0$)；也就是说，应有 $(t-r)\in T$，因此 T 没有最小数。同理，S 没有最大数。所以，有理数系不具有完备性(C)。

为什么我们不能在实数系找出相似的例子呢？当然，这是由于实数系的完备性。让我们象上面一样做，并仔细地看看区别在哪

里。象(1.1)那样定义集S和T，不过要用R代替Q。我们断定S和T是非空的，S内的每一数均小于T内的每一个数。可以证明S没有最大数和T没有最小数，而完备性(C)指出只有一种可能性，就是$R \neq S \cup T$，亦即必有某个实数既不属于S又不属于T。容易看到，如果x是一个实数，而$x \notin S$和$x \notin T$，则$x^2=2$。因此，由完备性得知在R内存在数2的平方根。

习　题

从基本性质(A)，(B)和(C)出发，推导实数的性质(习题 1—10)。

1. 若$x<y$并且$z<w$，则$x+z<y+w$。
2. 若$x<0$，则$-x>0$。
3. 若$x+y=x$，则$y=0$。
4. 对R内的每一个x，均有$x0=0$。
5. 若$x<y$并且$y<z$，则$x<z$。
6. 若$xy=0$，则$x=0$或若$y=0$。
7. (a) $(-x)y=-(xy)$。提示：$[x+(-x)]y=?$

   (b) $(-x)(-y)=xy$。
8. 对R内每一个x，$x^2 \geqslant 0$。
9. 若$x<y$，则$x<\frac{1}{2}(x+y)<y$。
10. 若$x^2+y^2=0$，则$x=y=0$。
11. 用实数系的完备性证明：每一个正实数有唯一的正平方根。
12. 整数集(其中加法，乘法和顺序与R中一样)不是完备的有序域。正确地说，请指出整数集不满足条件(A)，(B)，(C)中的哪一个？

1.2　完备性的推论

我们将讨论实数系完备性的几个应用。首先，介绍几个基本术语。

定义　设A是实数集，亦即A是R的一个子集。如果存在数$b \in R$，使得

$$a \leqslant b,\ \text{对一切}\ a \in A,$$

则称 A 是**有上界**的，b 叫做集 A 的一个**上界**。如果存在数 $c \in R$ 使得

$$c \leqslant a, \quad \text{对一切}\ a \in A,$$

就称 A 是**有下界**的，c 叫做集 A 的一个**下界**。如果 A 既有上界又有下界，就称 A 是**有界**的。

简单分析一下，可知集 A 有下界的充要条件是集 $-A=\{-x; x \in A\}$ 有上界。如果 b 是 $-A$ 的一个上界，则 $-b$ 是 A 的一个下界。这可以直接由如下事实得到：条件 $x>y$ 等价于 $-x<-y$。集 A 有界的充要条件是集 $|A|=\{|x|; x \in A\}$ 有上界。如果 b 是 $|A|$ 的一个上界，则

$$-b \leqslant x \leqslant b, \quad x \in A.$$

另一方面，如果

$$c \leqslant x \leqslant d, \quad x \in A.$$

则 $|c|$ 和 $|d|$ 的较大者是集 $|A|$ 的一个上界。

例 2 正实数集

$$R_+ = \{x \in R; x>0\}, \tag{1.2}$$

可作为 R 的无界子集的例子。R_+ 是有下界的集；其实，任何一个 $x \leqslant 0$，都是 R_+ 的一个下界。但 R_+ 不是有上界的集。如果 b 是一个上界，将有 $b>0$，$(b+1) \in R_+$，$b \geqslant b+1$，这是矛盾的。

例 3 正整数集 Z_+ 是有下界的集，不是有上界的集。我们假定读者已熟悉实数系的 Archimedes 有序性，该性质是，如果 $b \in R$，则存在一个大于 b 的正整数。这一结果将写成下面的定理 2，其证明可以作为完备性应用的一个练习。

定理 1 设 A 是 R 的一个非空的有上界的子集，则 A 有一个最小上界。

证明 设 T 是 A 的一切上界所成的集，

$$T=\{b\in R;\quad 对一切\ x\in A,\ x\leqslant b\}.$$

设 S 是 T 的余集，

$$S=\{x\in R; x\notin T\}.$$

容易看出

(i) $R=S\cup T$;

(ii) 如果 $s\in S$ 和 $t\in T$，则 $s<t$.

由 S 的定义，知(i)是真的。那么，(ii)是什么意思呢？它是说，如果 $s\notin T$ 而 $t\in T$，则 $s<t$；或者，如果 $t\in T$，$s\geqslant t$，则 $s\in T$。根据 T 的定义，后一论断显然成立。

A 是有上界的假设保证了 T 是非空集。A 是非空的假设告诉我们 S 是非空的。证明如下：任选 $x\in A$，则 S 包含一切 y，$y<x$，这是因为，如果 $y<x$，则 y 不是 A 的一个上界。

现在完备性条件告诉我们，S 有一个最大数或 T 有一个最小数这两件事中必有一个成立。但是 S 没有最大数，这是因为，令 $s\in S$，即 $s\notin T$，则 s 不是 A 的上界。从而存在数 $a\in A$，使得 $a>s$。数 $d=\frac{1}{2}(a+s)$ 满足

$$s<d<a.$$

由于 $d<a$，故有 $d\in S$。因为 $s<d$，所以 s 不是 S 的最大数。

于是，在 T 中有最小数 c。数 c 满足

(i) c 是集 A 的一个上界；

(1.3)

(ii) 如果 b 是 A 的一个上界，则 $c\leqslant b$.

换句话说，c 是 A 的最小上界。

显然，有一个相伴的结果：如果 R 的一个子集 A 是非空和有下界的，它必有最大下界。即存在数 c 满足

(i) c 是 A 的一个下界；

(1.4)

(ii) 如果 b 是 A 的一个下界，则 $c \geqslant b$。

记号和术语 设 A 是 R 的一个非空子集。如果 A 是有上界的集，A 的最小上界也叫做 A 的**上确界**，并记为

$$\sup A^{①}.$$

如果 A 是有下界的集，A 的最大下界也叫做 A 的**下确界**，并记成

$$\inf A.$$

也许会奇怪，为什么我们对最小上界和最大下界还要介绍它的名称。一个理由是它们使用频繁，因此必须缩写②，但是"lub"和"glb"较少使用。

定理 1 是实数系完备性的另一形式。在 1.1 节，如果用定理 1 代替性质(C)，则性质 (C) 很容易作为一个定理被证明。这两个性质仅有轻微的区别。我们将用定理 1 来证明正整数集是无界集。

定理 2（Archimedes 有序原理） 如果 x 是一个实数，则存在正整数 n，使得 $x<n$。

证明 假定 Z_+ 是有上界的集，令 $c=\sup Z_+$。由于 c 是 Z_+ 的最小上界，$c-1$ 就不是 Z_+ 的一个上界。因此，存在正整数 n，使得 $c-1<n$，所以 $c<n+1$。但是这说明 c 不是 Z_+ 的上界，与 c 的假定矛盾。

系 如果 $x>0$，则存在正整数 n 满足 $\frac{1}{n}<x$。

系 如果 $y-x\geqslant 1$，则存在一整数 n 满足 $x\leqslant n\leqslant y$。

证明 根据定理 2，存在整数 m 满足 $x\leqslant m$。至多只有有限个整数 k，满足 $x\leqslant k\leqslant m$。(由数学归纳法得到)。设 n 是那些整数中最小的。容易验证 $x\leqslant n\leqslant y$。

系 若 A 是有界整数集，则 $\sup A$ 和 $\inf A$ 是整数。

---

①sup 是上确界 supremum 的缩写，inf 是下确界 infimum 的缩写。——译者。

系 若$x<y$，则存在有理数r满足$x<r<y$。

证明 选择一正整数n，使得$n(y-x)>1$。于是可找到一整数m，满足$nx<m<ny$，令$r=\frac{m}{n}$即可。

定理 3 设x是一正实数，n是一正整数。则恰有一正实数y，使得$y^n=x$。

证明 先简单地考察一下。如果$s\geqslant 0$和$t\geqslant 0$，则$t\geqslant s$的充要条件是$t^n\geqslant s^n$。这可从下述事实得到：

$$t^n-s^n=(t-s)f(t,s),$$

式中，$f(t,s)=t^{n-1}+t^{n-2}s+\cdots+ts^{n-2}+s^{n-1}$。由于$f(t,s)>0$，除$s=t=0$外，数$t^n-s^n$和数$t-s$有相同的符号。

于是，明显地，不可能得到两个不同的n次正根。因而只要证明至少存在一个就可以了。

设

$$A=\{y\in R;y>0\text{ 并且 }y^n\geqslant x\}.$$

于是A是有下界的集，而且A是非空的。当$x\leqslant 1$时，有$1^n\geqslant x$，所以$1\in A$；当$x>1$时，有

$$x^n-x=x(x^{n-1}-1)\geqslant 0,$$

所以$x\in A$。令$c=\inf A$，则必有$c\geqslant 0$且$c^n=x$。

首先证明$c^n\leqslant x$。假如$c^n>x$，必存在一个小的正数r使得$(c-r)^n>x$（见下面的引理）。根据A的定义，$(c-r)\in A$，但是$c-r<c$，而c是A的下界，导致矛盾。因此必须有$c^n\leqslant x$。

利用A没有大于c的下界这一事实可导出$c^n\geqslant x$。假如$c^n<x$，就能找到一个小的正数r，使得$(c+r)^n<x$。于是对一切$y\in A$，有$(c+r)^n<x\leqslant y^n$，由此得出，对一切$y\in A$，有$c+r<y$。所以$c+r$是A的一个下界。但$c+r>c$；这就产生了矛盾。所以$c^n\geqslant x$。

引理 设n是正整数，a、b和c是实数，满足$a<c^n<b$。则存

在数 $\delta>0$，对任一满足 $|r|<\delta$ 的 r，有 $a<(c+r)^n<b$。

证明 我们有

$$t^n-c^n=(t-c)f(t,c),$$

式中

$$f(t,c)=t^{n-1}+t^{n-2}c+\cdots+tc^{n-2}+c^{n-1}.$$

在公式中取 $t=c+r$，得到

$$(c+r)^n-c^n=rf(c+r,c).$$

因此

$$|(c+r)^n-c^n|\leqslant|r||f(c+r,c)|.$$

现在

$$|f(c+r,c)|\leqslant(|c|+|r|)^{n-1}+(|c|+|r|)^{n-2}|c|+\cdots$$
$$+(|c|+|r|)|c|^{n-2}+|c|^{n-1}.$$

如果 $|r|\leqslant1$，则

$$|f(c+r,c|\leqslant(|c|+1)^{n-1}+(|c|+1)^{n-2}|c|+\cdots$$
$$+(|c|+1)|c|^{n-2}+|c|^{n-1}$$
$$=f(1+|c|,|c|).$$

所以，当 $|r|\leqslant1$，有

$$|(c+r)^n-c^n|\leqslant|r|f(1+|c|,|c|).$$

我们将把这一不等式写成更具体的形式，虽然这样做并不是必要的。因为 $(1+|c|)-|c|=1$，f 的定义告诉我们

$$f(1+|c|,|c|)=(1+|c|)^n-|c|^n.$$

所以，当 $|r|\leqslant1$ 时不等式成为

$$|(c+r)^n-c^n|\leqslant|r|[(1+|c|)^n-|c|^n], \tag{1.5}$$

由已知 $a<c^n<b$，当 $|r|$ 充分小时，要证明 $a<(c+r)^n<b$。设 s 是数 c^n-a 和数 $b-c^n$ 中较小的一个，如果

$$|(c+r)^n-c^n|\leqslant s,$$

将有 $a<(c+r)^n<b$。取 δ 使得

$$\delta[(1+|c|)^n-|c|^n]=\varepsilon.$$

当 $|r|<\delta$ 时从(1.5)有

$$a<(c+r)^n<b.$$

读者早已熟悉这一引理的结论——n 次幂函数是连续的。由于在使用不等式上可能经验不多，所以我们还是给出了证明。

满足 $y^n=x$，$y>0$ 的唯一的 y，可用 $\sqrt[n]{x}$ 或 $x^{\frac{1}{n}}$ 表示。要记住 $x^{\frac{1}{n}}>0$。如果 n 是偶数，还有另一实数 y 满足 $y^n=x$，也就是 $y=-x^{\frac{1}{n}}$。如果 n 是奇数，则没有其它的 n 次实根。

习　题

1. 有理数集是有下界的集吗?

2. 举出有界集 A 的例子，使得 $\sup A$ 在 A 内，而 $\inf A$ 不在 A 内。

3. 写出满足条件 $\sup A\leqslant\inf A$ 的一切非空有界集 A。

4. 空集是有上界的集吗?它有最小上界吗?

5. 有界集的任一子集是有界的。包含一个无界集的集是无界的（无界集就是非有界的集）。

6. 如果 A 是有上界的集，B 是有下界的集，则交 $A\cap B$ 是有界的。

7. 证明，如果 x 是任一实数，则

$$x=\sup\{r\in Q;\ r<x\}.$$

8. 若 $x<y$，则存在一无理数 t 满足 $x<t<y$。

9. 验证任一非空的正整数集必含有它的下确界。

10. 设 A 是 R 的不可列子集。证明，存在非空集 $B\subset A$，使得 $\sup B$ 不在 B 内(不可列集的定义见附录)。

11. 从定理 1 出发证明完备性(C)。

12. 证明，若 R 的子集 S 是完备有序域(保持 R 的加法、乘法和顺序)，则 $S=R$。

13*. 设 R 和 S 是完备有序域。证明 R 和 S 同构，即证明在 R 的数和 S 的数之间有一个一一对应，它保持加法、乘法和顺序。

1.3 区间和小数

这一节将讨论实数的小数表示，我们平时并不经常使用这些表示。本节的目的是双重的。它将使实数具体化，可以指着说，“那些就是实数”。更重要的，它将使我们弄明白区间和实数系完备性的关系。

定义 一个**区间**是一个集 $I\subset R$，它满足

(i) I 包含至少两个点；

(ii) 若 $x<t<y$ 和 $x, y\in I$，则 $t\in I$。

有界区间有四个类型，依次说明如下：

开区间 $(a, b)=\{x\in R; a<x<b\}$；

闭区间 $[a, b]=\{x\in R; a\leqslant x\leqslant b\}$；

半闭区间 $(a, b]=\{x\in R; a<x\leqslant b\}$；

半闭区间 $[a, b)=\{x\in R; a\leqslant x<b\}$。

这里 a，b 是实数，且 $a<b$。

无界区间有如下的五种类型：

$$(a, \infty)=\{x\in R; a<x\};$$

$$[a, \infty)=\{x\in R; a\leqslant x\};$$

$$(-\infty, b)=\{x\in R; x<b\};$$

$$(-\infty, b]=\{x\in R; x\leqslant b\};$$

$$(-\infty, \infty)=R.$$

证明每一区间必是这九类区间的一种，我们留作练习题。在无界区间的记号中出现符号“$-\infty$”和“∞”。在实数系中，$-\infty$ 和 ∞ 并不是具体的数；事实上，“$-\infty$”和“∞”是无意义的，但“左无限”和“右无限”却有它的用处，我们以后再介绍。

实数的小数表示，简单地指定为一列区间套中的数，这些区间的长度依次缩小十倍。对每一 $x\in R$，由 Archimedes，有序性和

数学归纳法可定义一个整数 n，使 x 含在半闭区间 $[n, n+1)$ 中，n 是不超过 x 的**最大整数**：

(1.6) $$n=\sup\{k\in Z; k\leqslant x\}.$$

于是 $(x-n)\in[0, 1)$。因此，对实数的小数表示的讨论，将限于区间 $[0, 1)$ 内的数。考虑数 $x\in[0, 1)$。对任一这样的 x，将对应一小数展开

$$x\sim 0.a_1a_2a_3\cdots$$

式中数字 a_n 是 0 到 9 之间的整数。估计大家已熟悉这一展开过程。把 $[0, 1)$ 分成十个长度为 $\frac{1}{10}$ 的区间 I_k：

$$I_k=\left[\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10}\right), k=0, \cdots, 9.$$

若 I_k 包含 x，则数字 a_1 就是 k（见图 1）。x 的小数表示中第一个数字也可取为：

$$a_1=\sup\{k\in Z; \frac{k}{10}\leqslant x\}.$$

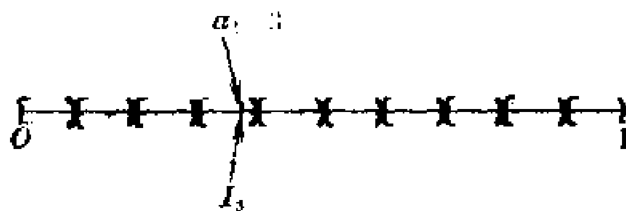


图 1

下面，把区间 I_{a_1} 分成长度为 $\frac{1}{10^2}$ 的十个区间。这些区间是

$$[a_1 10^{-1}+k10^{-2}, a_1 10^{-1}+(k+1)10^{-2}), k=0, \cdots, 9.$$

包含 x 的那一个区间就决定了数字 a_2。换句话说，

$$a_2=\sup\{k\in Z; a_1 10^{-1}+k10^{-2}\leqslant x\}.$$

把这种再分过程进行下去，最终我们得到了怎样的小数表示呢？其实，这样做就循序定义了数字 $a_1, a_2, a_3, \cdots$。

(i) a_1 是满足 $k10^{-1}\leqslant x$ 的最大整数 k，

(ii) 当 $a_1, \cdots, a_{n-1}$ 决定后，a_n 是满足下式的最大整数 k

$$a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \cdots + a_{n-1} 10^{-(n-1)} + k 10^{-n} \leqslant x.$$

我们所做的是将 x 相继的放到一列半闭区间 $J_1, J_2, J_3, \cdots$ 里去，这些区间的定义是：

(1.7) $$J_n = [a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \cdots + a_n 10^{-n}, a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \cdots + (a_n + 1) 10^{-n}).$$

区间 J_n 是"成套的"：

$$J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \cdots$$

而 x 是属于一切 J_n 的交。事实上，

(1.8) $$\bigcap_n J_n = \{x\};$$

亦即，没有其它数属于每一个 J_n。为什么？这是因为，如果 a, $b \in J_n$，则 $|a-b| < 10^{-n}$。于是，如果 y（以及 x）属于每一个 J_n，则

$$|y - x| < 10^{-n}, n = 1, 2, 3, \cdots$$

因此 $y - x = 0$。

由上述知道，对每一 $x \in [0,1)$，有与之相应的一列数字 $a_1, a_2, a_3, \cdots$；由(1.8)，对不同的 x，有不同的数字列与之对应。所以，使用记号

$$x = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots$$

是合理的。其实，上式就是

(1.9) $$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n},$$

但这一写法较烦琐。

现在要问，任一列数字 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 一定是数 $x \in [0, 1)$ 的小数表示吗？显然不是，假如我们根据这一基本法则做下去，对每一 n，取 $a_n = 9$。交

$$\bigcap_n [1 - 10^{-n}, 1)$$

是空集。因此，对 $[0, 1)$ 中的任何 x，不可能有 $x \sim 0.999\cdots$。为了

确定它，用[0, 1]代替 [0, 1)，则 0.999…是数 1 的小数表示。在我们讨论过程中，还有一些数字的序列未遇到过，例如，在以上讨论中，还未遇到过小数表示的尾部都是 9 的情形：

(1.10) $$0.a_1a_2\cdots a_m999\cdots.$$

下述小数表示，与(1.10) 的表示只有细微的区别，它确定同一个数：

(1.11) $$0.a_1a_2\cdots(a_m+1)000\cdots$$

这里规定 $a_m\neq 9$。

对于 9 的循环不必奇怪，然而问题的中心是数字列 $a_1, a_2, \cdots$ 是否必须表示一个实数。问题的要害是，如果某人给出一列数字 $0.a_1a_2a_3\cdots$，我们能在数轴上找到它所代表的实数吗？这些数字给出了一个(1.7)所定义的区间套：

$$J_1\supset J_2\supset J_3\supset\cdots$$

所求的 x 将取作区间列的交，但是交也可以是空集，这是由于数字 9 循环所致。所以我们必须用闭区间

$$\bar{J}_n=[b_n, c_n]$$

代替原来的半闭区间

$$J_n=[b_n, c_n).$$

对数列尾部是数字 9 的循环的情形，集 $\bar{J}_n$ 的交将是右端点。所以可断定

$$\bigcap_n\bar{J}_n=\{x\},$$

并且 $x\in[0, 1]$。由于 $\bar{J}_n$ 的长是 10^{-n}，交最多只有一点。实数系的完备性保证在其交内至少存在一点 x。

定理 4(区间套定理) 设

$$I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots$$

是 R 中的(有界)闭区间套，必存在实数 x 属于每一 I_n。

证明 设 $I_n=[b_n, c_n]$。则

$$b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3 \leqslant \cdots \leqslant c_3 \leqslant c_2 \leqslant c_1.$$

设B是全部数b_n，$n=1, 2, 3, \cdots$组成的集，则B是非空的，由于任一c_n都是B的一个上界，所以B是有上界的集。设

$$x = \sup B.$$

我们要求对每一n有$x \in I_n$，亦即对每一n，应有$b_n \leqslant x \leqslant c_n$。由于$x$是$B$的上确界，必有$b_n \leqslant x$。又因每一$c_n$是$B$的上界，因此$x \leqslant c_n$。

有了区间套定理，我们就完成了小数的讨论。在所有的数$x \in [0, 1]$的集和一切数字列$0.a_1a_2a_3\cdots (a_k \in Z, 0 \leqslant a_k \leqslant 9)$所成集之间有了一个对应。只要把序列(1.10)和(1.11)看成同一数，这个对应是一对一的。

习　题

1. 证明R内的每一区间都是我们所举出的九类区间之一。

2. 设$\{I_\alpha\}$是R内的任一族区间。证明交

$$\bigcap_\alpha I_\alpha,$$

必是下述集的一种：

(a) 空集，

(b) 单元素集，

(c) 一个区间。

3. 设A是R的有界子集。包含A的一切闭区间的交是什么？

4. 给出开区间套的例子，使这开区间套的交是空集。给出开区间套的例子，使它们的交是单元素集、是一个开区间、是一个闭区间，是一半闭区间。

5. 闭区间套的交是哪一种集？

6. 限于有理数系，作出一个闭区间套，使它们的交是空集。

7. 用区间套定理给出[0, 1]中每一点的二进制表示：

$$x \sim 0.a_1\, a_2\, a_3 \cdots$$

式中数字a_n取0或1。

8. 在1.1节中，假定有了(A)，(B)、区间套定理以及Archimdes有序性质。证明完备性(C)。

1.4 Euclid 空间

假定读者对 n 维 Euclid 空间(简称为欧氏空间) 已有了解。设 n 是正整数,则

$$R^n = R \times \cdots \times R,$$

是实数集 R 的 n 重笛卡儿乘积。有时把 R^n 的点叫做**向量**,点的标准记号是

$$x = (x_1, \cdots, x_n),$$

$$y = (y_1, \cdots, y_n),$$

等等。数 x_i 是 x 的第 i 个(标准)**坐标**。

R^n 中通常的向量加法定义为坐标相加:

$$x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n).$$

对每一向量 $x \in R^n$ 和数 $c \in R$ 可定义一种积,叫做**数量乘法**

$$cx = (cx_1, \cdots, cx_n).$$

关于上述加法和数量乘法, R^n 构成向量空间。这表明向量加法满足 1.1 节条件 A(1) – A(4), 数量乘法满足

$$c(x + y) = cx + cy,$$

$$(b + c)x = bx + cx,$$

$$1x = x.$$

加法的零向量是**原点** $0 = (0, \cdots, 0)$。

设 x 和 y 是 R^n 中向量, x 和 y 的(标准)**内积**是数

(1.12) $$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

许多书中,也称为点积并记为 $x \cdot y$。显然,内积具有性质:

(i) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;

(1.13) (ii) $\langle cx + y, z\rangle = c\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;

(iii) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$; 若 $\langle x, x\rangle = 0$ 则 $x = 0$。

若 $x\in R^n$，x 的**长度**（**范数**）是

$$|x|=\langle x,\ x\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

x 到 y 的**距离**是 $|x-y|$。这样定义的长度和距离具有我们所要求的性质，为了验证这一点，最方便的办法是验证**Cauchy 不等式**：若 $x_1, \cdots, x_n$ 和 $y_1, \cdots, y_n$ 是实数，则

$$(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)^2\leqslant(x_1^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+\cdots+y_n^2). \tag{1.14}$$

引理（Cauchy 不等式） 若 x 和 y 是 R^n 内向量，则

$$|\langle x,\ y\rangle|\leqslant|x|\,|y|. \tag{1.15}$$

等号成立的充要条件是两个向量中的一个是另一个乘以数量。

证明 若 $y=0$，容易看出不等式成为等式。若 $y\neq 0$，根据

$$\begin{aligned}0&\leqslant\langle x-cy,\ x-cy\rangle\\&=|x|^2-2c\langle x,\ y\rangle+c^2|y|^2\end{aligned}$$

式中取

$$c=\frac{\langle x,\ y\rangle}{|y|^2}$$

就得到 Cauchy 不等式。若等号成立，则 $x=cy$。

长度具有下述性质：

(i) $|x|\geqslant 0$；若 $|x|=0$ 则 $x=0$；

(ii) $|cx|=|c|\,|x|$；

(iii) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$。

从 Cauchy 不等式可得到三角不等式(iii)，因为

$$\begin{aligned}|x+y|^2&=|x|^2+2\langle x,\ y\rangle+|y|^2\\&\leqslant|x|^2+2|x|\,|y|+|y|^2\\&=(|x|+|y|)^2.\end{aligned}$$

我们就几何方面说几句，这在 1.6 节还有更充分的讨论。通常，我们宁愿把 R^n 中"向量" x 看作从原点到 x 的线段，而不是看作点 x。有两个向量 x 和 y，若其中任意一个都不是另一个的倍数，则这两个向量可以张成 R^n 中的平面。这平面经过原点，并且

由一切形如 $ax+by$ 的向量所组成，这里 a, $b\in R$. 向量 x 和 y 是平面上的平行四边形的两条边。如图 2 所示，平行四边形的一条对角线从原点伸展到点 $x+y=(x_1+y_1, \cdots, x_n+y_n)$。令 θ 是向量 x 和向量 y 之间的夹角，$0<\theta<\pi$。此时，向量 x 和向量 y 的内积成为另外一个等式：

(1.16) $$\langle x, y\rangle = |x||y|\cos\theta.$$

此式中 θ 在某种意义上反映了 Cauchy 不等式与等式的差距。学了有关正交基的一些性质后，验证(1.16)特别容易。那时由于使用正交基，只需要在 R^2 中验证(1.16)就可以了。请参看 1.5节习题 3 和 4。

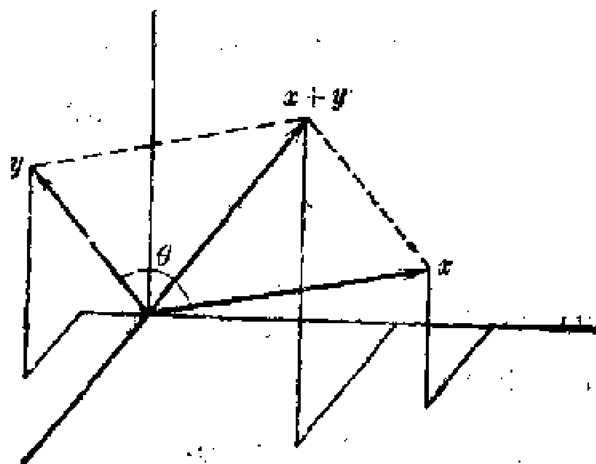


图 2

例 4 我们考察 Cauchy 不等式对矩阵的应用。为简单起见，只讨论方阵。$k\times k$ 实矩阵是用实数排成的 k 行和 k 列的矩阵：

$$A=[a_{ij}], \quad 1\leqslant i\leqslant k, \quad 1\leqslant j\leqslant k.$$

用对应项相加得到矩阵之和

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$$

类似地

$$cA=[ca_{ij}].$$

于是，$k\times k$ 矩阵的空间正好是 R^{k^2}，带有 k^2 个坐标，排成 k 行和

k 列。矩阵 A 的范数由

$$|A|^2=\sum_{i,j}a_{ij}^2$$

给出。

我们把 $k\times k$ 矩阵空间记为 $R^{k\times k}$，这会使我们想到其元素是 k^2 个坐标排成的行和列。这一处理对与矩阵乘法有关的问题是适宜的。矩阵的乘积被定义为 $C=AB$，其中

$$c_{ij}=\sum_r a_{ir}b_{rj}.$$

它是可结合的：$(AB)C=A(BC)$，并且，它满足分配律：$A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$。除非 $k=1$，矩阵乘法是不可交换的，亦即，一般地 $AB\neq BA$。矩阵乘积的范数关系 $|AB|\leqslant|A||B|$ 是很重要的。

定理 5 如果 A 和 B 是 $k\times k$ 矩阵，则

$$|AB|\leqslant|A||B|.$$

证明

$$|AB|^2=\sum_{i,j}\left[\sum_r a_{ir}b_{rj}\right]^2$$

$$\leqslant\sum_{i,j}\sum_r a_{ir}^2\sum_s b_{sj}^2 \quad \text{(Cauchy 不等式)}.$$

现在

$$|A|^2=\sum_{i,r}a_{ir}^2,$$

$$|B|^2=\sum_{s,j}b_{sj}^2,$$

所以有

$$|AB|^2\leqslant|A|^2|B|^2.$$

矩阵空间的内积可以用矩阵乘法来表示，方法如下

$$\langle A,B\rangle=\operatorname{tr}(AB^t). \tag{1.17}$$

矩阵的**迹**是矩阵对角元素的和。矩阵 B^t 是 B 的**转置**矩阵，B^t 的 i,j 元是 b_{ji}。当 $B=A$ 时，(1.17) 为

$$|A|^2=\operatorname{tr}(AA^t).$$

1.5 复　数

实数系加进数 -1 的平方根就得到复数系。由于实数的大小次序不能扩充成复数的次序，复数系无顺序结构。但复数系以更丰富的方式使它成为掌握数学不可缺少的部分。例如，虽然我们从多项式 x^2+1 的零点得到复数，但却可证明，不是常数的实(或复)系数的多项式在复数集内有零点。这就是代数基本定理，我们以后证明它。

我们谨向读者指出：(1) 本节虽短，其重要性却不可低估。(2) "复数"、"实数"和"虚数" 这些奇妙术语本身不能显示数的存在与否。

我们列出复数系的一些基本性质，它们表达了复数系的特征。设 C 是复数集。

1. C 是域，即 C 中有加法和乘法，它满足 1.1 节的域公理(A)。

2. R 作为一个子域包含在 C 内。

3. 存在元素 $i\in C$ 满足 $i^2=-1$。

4. 如果 C 的一个子域包含 R 和 i，那么这个子域就是整个 C。

若一个子集 S 包含 0 和 1，并对和、差、积、商封闭，则 S 是**子域**。(2) 说明 R 在 C 内，当把 C 的加法和乘法限制到 R 内时，就成为 R 的加法和乘法。若 S 是包含 R 和 i 的子域，则 S 包含 C 的一切形如 $x+iy$ 的元素，其中 x 和 y 在 R 内。另一方面可以证明，那些数的集合是一个子域，因此，根据(4)，它就是 C。

于是 C 由形如

$$z=x+iy,\qquad x,\ y\in R \tag{1.18}$$

的数所组成。这些数之间具有加法和乘法，根据通常的代数法则

(域公理)以及 $i^2=-1$。数 z 的表示 (1.18)是唯一的。我们称 x 为 z 的实部,记为

$$x=\mathrm{Re}(z),$$

称 y 为 z 的**虚部**,记为

$$y=\mathrm{Im}(z).$$

请注意,虚部是实数。z 的(复)**共轭**是数

(1.19) $$z^*=x-iy.$$

注意 $(z+w)^*=z^*+w^*$,并且$(zw)^*=z^*w^*$。

由于

(1.20) $$zz^*=x^2+y^2\geqslant 0,$$

从而可定义 z 的**绝对值**为

(1.21) $$|z|=(zz^*)^{\frac{1}{2}}.$$

联系到(1.20),我们要注意的是:若 $w\in C$,而写出 $w\geqslant 0$,这表示 w 是实数,并且 $w\geqslant 0$。

可直接验证

$$|z+w|\leqslant|z|+|w|,$$

(1.22)

$$|zw|=|z||w|.$$

由(1.22)第二式(若 $z\neq 0$)数 $z/|z|$ 的绝对值是1。因此任一非零复数 z 可唯一表示成

(1.23) $$z=rw,\quad r>0,\quad |w|=1.$$

在复数和 R^2 中的点之间有一一对应,通常直接把 C 和 R^2 当作同一集。数 $z=x+iy$ 和 R^2 中的点(x,y)相对应。复数加法对应于 R^2 内的向量加法,简言之,两个复数相加规定为它们的实部相加和虚部相加:

$$\mathrm{Re}(z+w)=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w),$$

$$\mathrm{Im}(z+w)=\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(w).$$

于是,C 的加法可用平行四边形表示。绝对值对应于 R^2 的长度:

$$|z| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

共轭是对实直线的反射。

乘法的几何解释与角有关。设 w 是绝对值为 1 的复数：

$$w = u + iv,$$

$$u^2 + v^2 = 1.$$

点 (u, v) 组成中心在原点半径为 1 的圆——通常叫做**单位圆**。在单位圆上的每一个 w 可唯一决定一个从向量 1 到向量 w 的角 θ（见图 3）。由 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的通常定义，有

$$u = \cos\theta,$$

$$v = \sin\theta.$$

于是

(1.24) $$w = \cos\theta + i\sin\theta.$$

在讨论中，若 θ 用数来表示，则(1.24) 将决定唯一 θ，$0 \leqslant \theta < 2\pi$。任何数 $\theta + 2k\pi$，$k \in Z$，视作为同一个点。

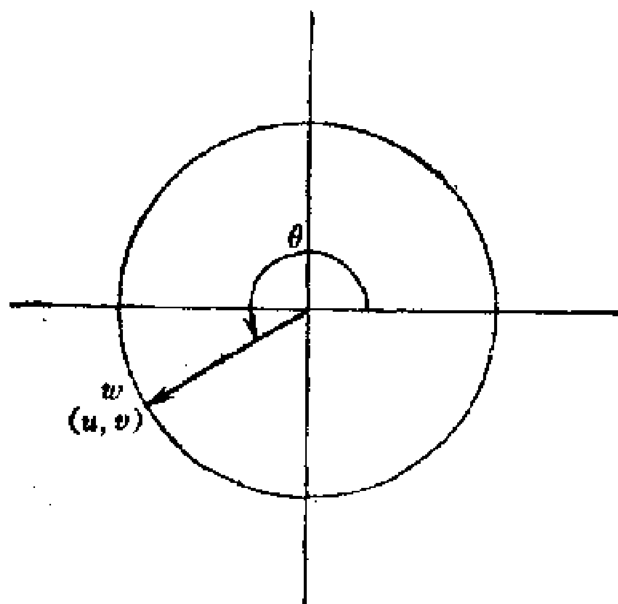


图 3

现在有

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

（我们以后还要仔细讨论。）显然，任一非零复数 $z \in C$ 可表示成

(1.25) $$z=re^{i\theta},\quad r>0,\quad \theta\in R.$$

而 $r=|z|$。这样的 θ 有许多，它们彼此间相差 2π 的整数倍。每一 θ 是 z 的一个**辐角**。若还有

$$w=\rho e^{it},\ \rho>0,\ t\in R,$$

则

$$zw=(r\rho)e^{i(t+\theta)}.$$

也就是说，复数的乘法是绝对值相乘，辐角门加。这一事实也可不用指数函数而用三角恒等式来证明：

$$(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos t+i\sin t)=\cos(\theta+t)+i\sin(\theta+t),$$

式中

$$\cos(\theta+t)=\cos\theta\cos t-\sin\theta\sin t,$$

$$\sin(\theta+t)=\sin\theta\cos t+\cos\theta\sin t.$$

每一个非零复数 z 有 n 个不同的 n 次根。记

$$z=|z|e^{i\theta},\quad 0<\theta\leqslant 2\pi,$$

令 $\alpha=\frac{\theta}{n}$，则数

$$z_k=|z|^{\frac{1}{n}}e^{i\theta_k},$$

$$\theta_k=\alpha+k\frac{2\pi}{n},\qquad k=0,\ \cdots,\ n-1$$

是 n 次根：

$$z_k^n=z,\quad k=0,\ \cdots,\ n-1.$$

我们将略微讨论一下**复 n 维空间** C^n。它是一切 n 维复数 $(z_1,\cdots,z_n)$ 的集。向量加法和数量乘法形式上象 R^n 中一样定义，只要把 R 换成 C 即可。C^n 上的标准内积是

$$\langle z,\ w\rangle=z_1w_1^*+\cdots+z_nw_n^*.$$

也有性质(1.13)，此外还有

$$\langle w,\ z\rangle=\langle z,\ w\rangle^*.$$

于是，和内积、长度有关的 Cauchy 不等式是有效的，证法也一

样。利用不等式 $0 \leqslant \langle z+cw, z+cw\rangle$，令

$$c=-\frac{\langle z, w\rangle}{\langle w, w\rangle}.$$

在坐标意义下，Cauchy 不等式是

$$|z_1w_1^*+\cdots+z_nw_n^*|^2 \leqslant (|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2)(|w_1|^2+\cdots+|w_n|^2).$$

在 C^n 和 R^{2n} 之间有一个(实向量空间)同构。设 $z_j=x_j+iy_j$，则

$$(z_1, \cdots, z_n) \longrightarrow (x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n)$$

把 C^n 映照到 R^{2n} 上。这一映照保持和，实数量乘法和长度：

$$|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2=x_1^2+y_1^2+\cdots+x_n^2+y_n^2.$$

例 5 例 4 中对矩阵的讨论可直接推广到复的情形。复的 $k\times k$ 矩阵空间的特征和复的 k^2 空间一样。此时，内积为

$$\langle A, B\rangle=\operatorname{tr}(AB^*),$$

式中 B^* 是 B 的**共轭转置**，即 B^* 的 i, j 元为 b_{ji}^*。由于对复数也有 Cauchy 不等式，可以象定理 5 那样验证

$$|AB| \leqslant |A||B|.$$

复的 $k\times k$ 矩阵空间用 $C^{k\times k}$ 来表示。

习 题

1. 若 z 是复数，并且 $|1-z|=|1+z|=1$，则 $z=0$。

2. 若 $|z|<1$，$|w|=1$，则

$$\left|\frac{w+z}{1+z^*w}\right|=1.$$

3. 如果我们把 C 看作 R^2，则 z 和 w 的内积是

$$\langle z, w\rangle=\operatorname{Re}(zw^*).$$

4. 如果我们把 C 看作 R^2，则

$$\langle z, w\rangle=|z||w|\cos\alpha$$

式中 α 是从 z 到 w 的夹角。

5. 设 $0<r<1$，则

$$\sup\left\{\left|\frac{w+r}{w-r}\right|;\ w\in C,\ |w|=1\right\}=\frac{1+r}{1-r}.$$

6. 任一复 $k\times k$ 矩阵 A 可唯一地表示成形式 $A=A_1+iA_2$，式中矩阵 A_j 的元素是实数。等式

$$|A|^2=|A_1|^2+|A_2|^2$$

成立吗？

7. 任一复 $k\times k$ 矩阵 A 可唯一地表示成形式 $A=A_1+iA_2$，式中矩阵 $A_j=A_j^*$(共轭转置)。等式

$$|A|^2=|A_1|^2+|A_2|^2$$

成立吗？

1.6 线性几何

这里扼要地复习一下线性解析几何的基本事实。我们希望读者已熟悉这些材料。从阅读本书来说，这些材料不是根本的，但在例题和习题中却常常用到它。

设 x 和 y 是 R^n 内的不同点。通过 x 和 y 的**直线**是

$$\{tx+(1-t)y;t\in R\}.$$

设 S 是 R^n 的子集，x 和 y 是 S 中的元素，若通过 x 和 y 的直线也属于集 S，称 S 是**平坦**的，R^n 的(线性)子空间是包含原点的平坦子集。

子空间通常定义为：设 S 是非空子集，满足

(i) 若 x 和 y 属于 S，则 $(x+y)$ 也属于 S。

(ii) 若 x 属于 S，而 c 是任一实数，则 cx 也在 S 内。(i) 和 (ii) 也可以用单一的条件来代替：若 x 和 y 属于 S，则对一切 $c\in R$，有 $cx+y$ 属于 S。由平坦子集的定义可见，上述条件与平坦子集等价。其本质是若 $x_1,\cdots,x_k$ 是子空间 S 的向量，那末它们的任一**线性组合**

$$c_1x_1+\cdots+c_kx_k$$

也是 S 中的向量。设 $x_1, \cdots, x_k$ 是 R^n 中的向量，这些向量的一切线性组合所成的集称为由 $x_1, \cdots, x_k$ **所张成的子空间**。

注意，若一直线是平坦子集，则它成为子空间的充要条件是该直线通过原点。通过原点的平面(定义作)是 2 维子空间。关于维数，我们还要说几件事。

如果向量组 $v_1, \cdots, v_k$ 的某一非平凡线性组合是零向量，就称此向量组是**线性相关**的：

$$c_1v_1+\cdots+c_kv_k=0, \text{至少存在一个 } j, \text{使 } c_j\neq 0.$$

不是线性相关的一组向量就是**线性无关**的。若 $v_1, \cdots, v_k$ 是线性无关的，则 $v_i\neq 0$，并且当 $i\neq j$ 时必有 $v_i\neq v_j$。

关于线性相关的最基本事实是：若 $v_1, \cdots, v_k$ 是 R^n 内向量，并且 $k>n$，则 $v_1, \cdots, v_k$ 线性相关。简言之，R^n 中任意 $n+1$ 个向量必线性相关。这就是线性方程组基本定理的另一说法。若

$$v_i=(v_{i1}, \cdots, v_{in}), \quad 1\leqslant i\leqslant k$$

要求数 $c_1, \cdots, c_k$ 使得 $c_1v_1+\cdots+c_kv_k=0$，则数 c_i 满足

$$\begin{aligned}
c_1v_{11}+\cdots+c_kv_{k1}&=0\\
c_1v_{12}+\cdots+c_kv_{k2}&=0\\
\vdots\qquad\quad\vdots\qquad&\;\;\vdots\\
c_1v_{1n}+\cdots+c_kv_{kn}&=0.
\end{aligned}$$

若 $k>n$，有 k 个未知数的 n 个齐次线性方程组对$(c_1, \cdots, c_k)$有非平凡解(不是每一个 $c_i=0$)。

设 S 是 S^n 的子空间，S 的**维数** $\dim S$ 是 S 中能找到的线性无关向量的最大数。确切地说，$\dim S$ 是最大非负整数 k，表示 S 中有 k 个向量线性无关。当然，$\dim S\leqslant n$。显然，除了子空间 $S=R^n$ 外，都有 $\dim S<n$。

子空间 S 的一组（有序）**基**是由 k 个向量 $v_1, \cdots, v_k$ 组成，满足条件

(i) $v_1, \cdots, v_k$ 是线性无关的；

(ii) S 是由 $v_1, \cdots, v_k$ 张成的子空间。

基的最简单例子是 R^n 的**标准基**

$$(1.26)\qquad \begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \cdots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \cdots, 0) \\ &\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \cdots, 1). \end{aligned}$$

$x=(x_1, \cdots, x_n)$作为这些向量的线性组合的唯一表示是

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n.$$

定理 6 若S是 R^n 的子空间，则S存在基，且S的任一组基正好由$\dim S$个向量组成。

证明 令 $d=\dim S$，则S存在由d个向量组成的基：即能找到S的线性无关的向量 $y_1, \cdots, y_d$。由 d 的定义，对任一$x\in S$，向量 $y_1, \cdots, y_d, x$ 是相关的，这就意味着x是向量 y_i 的线性组合。

设 $v_1, \cdots, v_k$ 是子空间S的任意一组（有序）基。S中的每一个x都可表示成线性组合：

$$(1.27)\qquad x = c_1v_1 + \cdots + c_kv_k.$$

数 $c_1, \cdots, v_k$ 由x和基所唯一决定。如果x作为线性组合有另一表达式，我们用减法将得出与 $v_1, \cdots, v_k$ 线性无关相矛盾的结论。数组 $(c_1, \cdots, c_k)$是 **x 关于有序基 $v_1, \cdots, v_k$ 的 k 维坐标**。显然(1.27)定义了S内的一切向量x所成的集和R^k内的一切k-数组$(c_1, \cdots, c_k)$所成集之间的一个一一对应。在S内的两个向量x和y的加法就是对应坐标相加，x和数t的乘法是每一坐标c_j乘以t。于是，从线性运算看，S和R^k具有同样的性质(S和R^k同构)。特别，S内的任意$k+1$个向量是线性相关的。令 $d=\dim S$，则在S中存在d个线性无关的向量，于是 $d\leqslant k$，但由d的定义有 $k\leqslant d$。

设 $v_1, \cdots, v_n$ 是 R^n 的一组基。R^n 中的每一向量 x 关于这组基有它的坐标，它还有标准坐标。所谓标准坐标是向量关于标准基 $e_1, \cdots, e_n$ (1.26)的坐标。这两种坐标间有什么关系呢？如果

(1.28) $$x=(x_1, \cdots, x_n)=c_1v_1+\cdots+c_nv_n,$$

则

$$x_j=c_1v_{1j}+\cdots+c_nv_{nj}, \quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

也可写成

(1.29) $$x=CQ,$$

式中 $x=(x_1, \cdots, x_n)$, $C=(c_1, \cdots, c_n)$是 $1\times n$ 矩阵，Q 是 $n\times n$ 矩阵

$$Q=\begin{bmatrix} v_{11}\cdots v_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ v_{n1}\cdots v_{nn} \end{bmatrix}.$$

由于 $v_1, \cdots, v_n$ 是基，每一向量 e_i 是 $v_1, \cdots, v_n$ 的线性组合：

$$e_i=p_{i1}v_1+\cdots+p_{in}v_n, \quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

$n\times n$ 矩阵 $P=[p_{ij}]$具有如下性质：对 R^n 中的任一 x 有

(1.30) $$C=xP,$$

容易看到，矩阵 P 和 Q 满足

(1.31) $$PQ=QP=I,$$

式中 I 是 $n\times n$ 单位矩阵：$I_{ij}=\delta_{ij}$。于是矩阵 Q 是**可逆**的，且 $P=Q^{-1}$(类似地 $Q=P^{-1}$)。

设有 R^n 中的 n 个向量 $v_1, \cdots, v_n$，则它成为基的充要条件是矩阵 $Q=[v_{ij}]$是可逆的，而发生这种情况的充要条件是 Q 的行列式不等于零。

最简单的基是正交基，下面我们将讨论它。如果 R^n 中向量 x, y 满足$\langle x, y\rangle=0$，就称向量 x, y 是**正交**（**垂直**）**向量**。从定义直接可得到 Pythagoras 性质：若 x 和 y 是正交的，则

$$|x+y|^2=|x|^2+|y|^2.$$

k 个向量 $v_1, \cdots, v_k$，如果 $i\neq j$ 时有 v_i 同 v_j 正交（两两正交），就称为是**正交向量组**。在正交向量组中，如果每一个 v_i 的长度是1，这 k 个向量就称为是**标准正交向量组**。于是，k 个向量标准正交化就是

(1.32) $$\langle v_i, v_j\rangle=\delta_{ij}.$$

假如有 k 个向量 $v_1, \cdots, v_k$ 组成的标准正交向量组。x 是它们的线性组合

$$x=c_1v_1+\cdots+c_kv_k.$$

从(1.32)容易算出

(1.33) $$c_i=\langle x, v_i\rangle, \quad 1\leqslant i\leqslant k.$$

特别，若 $x=0$，则对一切 i 有 $c_i=0$。因此，由标准正交可推出线性无关性。

设 x 是 R^n 中任一向量，令

$$y=\langle x, v_1\rangle v_1+\cdots+\langle x, v_k\rangle v_k,$$

(1.34)

$$z=x-y,$$

根据上节的论述

$$\langle x, v_i\rangle=\langle y, v_i\rangle.$$

因此，z 和每一个 v_i 正交。当然，可以是 $z=0$，但是，显然 $z=0$ 的充要条件是 x 属于由 $v_1, \cdots, v_k$ 所张成的子空间。

定理 7 R^n 的任一子空间具有标准正交基。

证明 若 $v_1, \cdots, v_k$ 是 S 中 k 个标准正交向量，那末 k 有多大呢？由标准正交性可推出线性无关，必有 $k\leqslant\dim S$。取最大的 k，则 S 中每一向量 x 必是 $v_1, \cdots, v_k$ 的线性组合。否则，由(1.34)可找到 S 中向量 z，使得 $(k+1)$ 个向量 $v_1, \cdots, v_k, z/|z|$ 是标准正交的。

设 $v_1, \cdots, v_n$ 是 R^n 中 n 个标准正交向量，则它们构成 R^n 的(标准正交)基。由(1.33)，向量 x 关于基 $v_1, \cdots, v_n$ 的坐标是

$$x = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$$

(1.35)

$$c_i = \langle x, v_i \rangle.$$

和通常基作对比，这是极大的简化。从计算角度看，在标准正交情况下，Q 的逆阵是转置矩阵 $Q^t = [v_{ji}]$。而条件 $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ 表明

(1.36) $$QQ^t = I$$

这样的矩阵 Q 称为**正交矩阵**。

向量 $v_1, \cdots, v_n$：

$$v_i = (v_{i1}, \cdots, v_{in})$$

组成 R^n 的标准正交基当且仅当矩阵 $Q = [v_{ij}]$ 是正交矩阵。如果 Q 是正交的，则向量 x 关于标准正交基 $v_1, \cdots, v_n$ 的坐标 $c = (c_1, \cdots, c_n)$ 可由下式给出：

$$c = xQ^t$$

或

$$c_i = \langle x, v_i \rangle.$$

研究子空间 S 的最方便的工具是 S 的**正交补**：

(1.37) $$S^\perp = \{x \in R^n; \langle x, y \rangle = 0 \text{ 对一切 } y \in S\}.$$

定理 8 设 S 是 R^n 的子空间。那么，R^n 中任一向量 x 可唯一表达成形式

(1.38) $$x = y + z, \quad y \in S, z \in S^\perp.$$

证明 设我们已经将 x 分解成(1.38)。令 $v_1, \cdots, v_k$ 是 S 的任一标准正交基。由于 y 属于 S，

$$y = \langle y, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle y, v_k \rangle v_k.$$

因为 z 和每一 v_i 正交，故有 $\langle y, v_i \rangle = \langle x, v_i \rangle$。因此，

$$y = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle x, v_k \rangle v_k$$

(1.39)

$$z = x - y.$$

y 和 z 是唯一决定的。另一方面，给定 x，可以用这些公式定义 y 和 z，显然 y 在 S 内而 z 在 $S^{\perp}$ 内。

如果 x 在 R^n 内，定理 8 中的向量 y 称为 x 在 S 上的**正交投影**。虽然在定理的证明中，在用(1.39)定义 y 时，我们曾经利用了一个特殊的标准正交基，然而，象证明所指出的那样，y 和基是无关的。关于正交投影，请注意范数和内积的性质。令 y_1 是 x_1 在 S 上的正交投影，y_2 是 x_2 的正交投影：

$$x_1 = y_1 + z_1$$

$$x_2 = y_2 + z_2.$$

则

$$\langle x_1, x_2\rangle = \langle y_1, y_2\rangle + \langle z_1, z_2\rangle$$

$$|x_j|^2 = |y_j|^2 + |z_j|^2.$$

我们已经用基来描述了子空间。从对偶的观点来看，也可用方程组来描述子空间。这些方程是线性的，具有形式 $f(x)=0$，式中 f 是**线性函数**：

$$R^n \xrightarrow{f} R$$

$$f(cx+y) = cf(x) + f(y).$$

若 f 是 R^n 上这样的一个(实值)线性函数，则存在数 $a_1, \cdots, a_n$ 使得 f 有形式

$$f(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n.$$

设 $v_1, \cdots, v_n$ 是 R^n 的有序基，与之相联系的有 n 个**坐标函数** $f_1, \cdots, f_n$。f_i 是向量 x 关于基 $v_1, \cdots, v_n$ 的第 i 个坐标，即

$$x = f_1(x)v_1 + \cdots + f_n(x)v_n.$$

显然，$f_1, \cdots, f_n$ 是线性函数，其表达式是

$$f_j(x) = p_{1j}x_1 + \cdots + p_{nj}x_n$$

其中 $P=[p_{ij}]$是(1.30)的矩阵：

$$e_i=p_{i1}v_1+\cdots+p_{in}v_n.$$

函数 $f_1, \cdots, f_n$ 由它们是线性的这一事实所唯一决定：

$$f_i(v_j)=\delta_{ij}.$$

定理 9 设 S 是 R^n 的 k 维子空间，则 S 是 $(n-k)$ 个齐次线性方程组的解空间。

证明 设 $v_1, \cdots, v_k$ 是 S 的基，可以找到向量 $v_{k+1}, \cdots, v_n$，使 $v_1, \cdots, v_n$ 是 R^n 的基。考虑对应的坐标函数 $f_1, \cdots, f_n$。显然，S 是由 R^n 中满足条件

$$f_i(x)=0, \quad i=k+1, \cdots, n.$$

的一切向量 x 所组成。

注意，在证明中我们使用了标准正交基，结论是存在 R^n 中的 $(n-k)$ 个向量 $v_{k+1}, \cdots, v_n$，使得

$$S=\{x; \langle x, v_i\rangle=0, i=k+1, \cdots, n\}.$$

R^n 中的**超平面**是非零线性函数 f 的一个**等值面**：

$$H=\{x; f(x)=c\}$$

超平面是$(n-1)$维的平坦子集。如果给定上述 H，并选择某一 x_0 使 $f(x_0)=c$，则对H中的每一个 x，有 $f(x-x_0)=0$。所以 x 在H 中当且仅当

$$x=x_0+y, \quad f(y)=0.$$

使 f 为零的向量集是 $(n-1)$ 维子空间。于是任一超平面是 R^n中一个固定向量所决定的$(n-1)$维子空间，同样，我们看到，R^n 的任一非空平坦子集是由一子空间按照固定向量平移而得。定理 9 指出，R^n 的任一 k 维子空间是(通过原点的)$n-k$ 个超平面的交。于是，我们看到任一非空平坦子集 F 是超平面的交。事实上，F 可以由关于 F 中向量坐标的(不超过 n 个)线性条件所决定。

第 2 章　收敛和紧性

2.1　收敛序列

分析以极限概念为基础；确实，从本质上说，以极限运算为主要角色所形成的一个数学分支就是分析。我们先介绍序列的极限，这是最简单的一类极限，通过对它透彻的理解，将来掌握其它类型极限就容易了。

我们将在m维 Euclid 空间 R^m 中进行讨论。先介绍描述点和点间互相靠近的术语。

定义　如果$x_0 \in R^m$ 和 $r>0$，以点 x_0 为中心、以 r 为半径的**开球**是

$$B(x_0; r) = \{x; |x-x_0| < r\}. \tag{2.1}$$

以点 x_0 为中心、以 r 为半径的**闭球**是

$$\bar{B}(x_0; r) = \{x; |x-x_0| \leqslant r\}. \tag{2.2}$$

R^m 中的一个子集，如果它含有以 x_0 为中心的一个开球，称它为 x_0 的一个**邻域**。

x 的邻域包括充分接近 x 的每一个点。x 的最重要的邻域是 x 的开球。注意，在 R^2 中，开球(闭球)就是开圆(闭圆)，而在R^1中，开(闭)球就是(对称的)开(闭)区间。

定义　设$\{x_n\}$是一个序列，假如在 x 的任一邻域内，除了有限个 n 的值以外，含有其余所有的 x_n，就称序列$\{x_n\}$ **收敛于** x。如果$\{x_n\}$收敛于 x，那么我们记

$$x = \lim_n x_n. \tag{2.3}$$

假定 $x=\lim_n x_n$. 若 $r>0$，那末除了某些整数 $n_1, \cdots, n_k$ 以外，开球 $B(x, r)$ 包含 x_n，这里 $n_1, \cdots, n_k$ 与 r 有关. 设 N_r 是上述整数中最大的一个，则 N_r 是一个正整数，它满足如下条件：

$$|x-x_n|<r, \quad n>N_r.$$

因为 x 的每一邻域包含某些 $B(x; r)$，因此 x_n 收敛于 x 当且仅当，对任一正数 r，必存在正整数 N_r，使得

$$|x-x_n|<r, \quad n>N_r. \tag{2.4}$$

收敛这一术语经常在各种场合用到，通常省略大括号而说"x_n 收敛于 x"。序列 $\{x_n\}$ **收敛**(或**收敛的**，或**有极限**) 是指存在一个 x 使得 $\{x_n\}$ 收敛于 x。如果不存在这样的 x，我们称序列**发散**. 如果 $\{x_n\}$ 收敛于 x，称 x 是序列的**极限**，我们有时用下面的式子来代替(2.3)

$$x=\lim x_n,$$

或

$$x=\lim_{n\to\infty} x_n.$$

请注意收敛序列定义中的用词. 下面两种讲法有明显区别："除了有限个 n 外包含其余的 x_n"和"除了有限个 x_n 外包含其余的 x_n"。如果根据第二种用语，在 R^1 中，序列 $x_n=(-1)^n$ 将收敛于每一 $x\in R$，这是由于序列仅由二个元素组成，因此，任一开区间除了有限个 x_n 外包含其余的. 另一方面，凡是长度小于 2 的区间没有这样的性质：除了有限个 n 的值外包含 x_n. 因此这个序列 $\{x_n\}$ 不收敛.

引理 假设

$$x=\lim_n x_n, \quad y=\lim_n y_n,$$

则

(i) 对任一实数 c

(ii) $$\langle x, y\rangle=\lim_n\langle x_n, y_n\rangle.$$

证明 (i) 当$c=0$时(i)是显然的。若$c\neq 0$。设r是一个正数，由于

$$|(cx+y)-(cx_n+y_n)|\leqslant|c||x-x_n|+|y-y_n|,$$

假如下式成立

$$|y-y_n|<\frac{r}{2},$$

$$|x-x_n|<\frac{r}{2|c|},$$

那末从cx_n+y_n到$cx+y$的距离将小于r。由于$\{x_n\}$收敛于x，故存在正整数M，使得

$$|x-x_n|<\frac{r}{2|c|}, \quad n\geqslant M.$$

类似地，由于$\{y_n\}$收敛于y，故存在正整数N，满足

$$|y-y_n|<\frac{r}{2}, \quad n\geqslant N.$$

令$K=\max(M, N)$，于是

$$|(cx+y)-(cx_n+y_n)|<r, \quad n\geqslant K.$$

(ii) 对这一类型的论证，有标准的处理办法：

$$\langle x, y\rangle-\langle x_n, y_n\rangle=\langle x, y-y_n\rangle+\langle x-x_n, y_n\rangle.$$

根据Cauchy不等式

$$|\langle x, y\rangle-\langle x_n, y_n\rangle|\leqslant|x||y-y_n|+|y_n||x-x_n|.$$

由于$y=\lim_n y_n$，除了n的有限个值外，有

$$|y-y_n|<1,$$

从而

$$|y_n|<1+|y|.$$

取 b 是 $|x|$ 和 $1+|y|$ 中的较大者，除了有限个 n 外，应有

$$|\langle x, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| \leqslant b[|x-x_n| + |y-y_n|].$$

余下的证明和(i)中一样。

应注意引理的三种特殊情况。假如

$$x = \lim_n x_n,$$

$$y = \lim_n x_n,$$

则

$$y - x = \lim_n (x_n - x_n) = 0.$$

因此，一个序列最多只有一个极限。在(ii)中如果 $x_n = y_n$，有

$$|x|^2 = \lim_n |x_n|^2.$$

容易证明，可以把上式中的平方去掉；其实，从另一角度看，这是很平凡的：如果 x_n 收敛于 x，则有

$$|x| = \lim_n |x_n|,$$

这是因为

$$||x| - |x_n|| \leqslant |x - x_n|.$$

在 R^1 中，上述(ii) 可这样叙述：如果 x_n 收敛于 x 和 y_n 收敛于 y，则 $x_n y_n$ 收敛于 xy。

定理 1① R^m 中序列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$：

$$\boldsymbol{x}_n = (x_{n1}, \cdots, x_{nm}),$$

$\{\boldsymbol{x}_n\}$ 收敛的充要条件是 m 个坐标序列中的每一个 $\{x_{nj}\}$ 都收敛。假如

$$x_j = \lim_n x_{nj}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

则 $\boldsymbol{x}_n$ 收敛于 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$。

---

① 为了避免混淆，在定理 1 的证明中，m 维向量采用粗体字母。

证明 设$\{\boldsymbol{x}_n\}$收敛于向量$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)$。令$j$是一个下标，$1\leqslant j\leqslant m$，由于

$$|x_{nj}-x_j|\leqslant|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}|,$$

而$\lim|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}|=0$，所以序列$\{x_{nj}\}$收敛于$x_j$。

现在，假定对每一个j，$1\leqslant j\leqslant m$，坐标序列$\{x_{nj}\}$收敛。设$x_j=\lim\limits_n x_{nj}$，定义$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，则

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n|\leqslant|x_1-x_{n1}|+|x_2-x_{n2}|+\cdots+|x_m-x_{nm}|.$$

由于每一个序列$\{|x_j-x_{nj}|\}$收敛于0，因此，由前面的引理，它们的和也收敛于0，这就是说$\lim|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n|=0$，即$\boldsymbol{x}=\lim\boldsymbol{x}_n$。

例1 由定理1可得到复数序列$\{z_n\}$的收敛性。如果$|z_n-z|$收敛于0，就称z_n收敛于z。在C和R^2间有一个自然的对应：令$z=x+iy$对应于点(x, y)。根据定理1得到，$z=\lim\limits_n z_n$的充要条件是$\mathrm{Re}(z_n)$收敛于$\mathrm{Re}(z)$和$\mathrm{Im}(z_n)$收敛于$\mathrm{Im}(z)$。对空间C^k也有类似的结论。

例2 我们经常谈到矩阵序列的收敛性。讨论实(复)$k\times k$矩阵序列的收敛性，将在空间$R^{k\times k}[C^{k\times k}]$中进行运算。$R^{k\times k}$中元素是Euclid空间的$k^2$个坐标排成$k$行和$k$列。由定理1，$k\times k$矩阵序列的收敛等价于对应元素的收敛。请注意：若$A_n$收敛于$A$，$B_n$收敛于$B$，则矩阵乘积$A_nB_n$收敛于$AB$。证明和本节引理中(ii)的证明类似：

$$|AB-A_nB_n|\leqslant|A||B-B_n|+|A-A_n||B_n|.$$

这里用到了第一章定理5(复的情况)

$$|ST|\leqslant|S||T|.$$

例3 在许多问题里，给定序列$\{x_n\}$，我们对下列累次和的收敛性感兴趣：

$$S_n=x_1+\cdots+x_n. \tag{2.5}$$

对无穷级数

(2.6) $$\sum_n x_n$$

来说，我们称(2.5)中的 $S_1, S_2, \cdots$ 是级数的**部分和**。如果序列 $\{S_n\}$ 收敛，就说**级数收敛**；如果

$$S=\lim_n S_n,$$

我们称 S 是级数的**和**，并写作

(2.7) $$S=\sum_n x_n \text{ 或 } S=\sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

级数的记号(2.6)是简单而又方便的。当我们说，$\sum_n x_n$ 是无穷级数，这意味着 $\{x_n\}$ 是一个序列，我们感兴趣的正是部分和 S_n 的收敛性。但是，如果 S 是一个向量，而我们写出 (2.7)，这表示级数收敛，其和是 S。

在1.3节，对每一个数 $x\in[0,1]$，有一个小数表示

$$x\sim 0.a_1a_2a_3\cdots.$$

用级数的记号上式就是：

$$x=\sum_n a_n 10^{-n}.$$

设 z 是复数，$|z|<1$，则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

收敛，它的和是 $(1-z)^{-1}$。对这个级数有

$$S_n=1+z+\cdots+z^n=(1-z^{n+1})(1-z)^{-1},$$

由于 $|z|<1$，$\lim_k z^k=0$，于是 $1-z^{n+1}$ 收敛于1，而 S_n 收敛于 $(1-z)^{-1}$。用记号表示就是：

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n,\quad |z|<1.$$

习　题

1. 设 x 是 R^m 中一点，x 的所有邻域的并集是什么？ x 的所有邻域的交集是什么？这个交集是 x 的一个邻域吗？

2. 设 S 是由实数组成的非空有界集。证明存在一个点列 x_n，$x_n \in S$，满足

$$\lim_n x_n = \sup S.$$

如果 $\{x_n\}$ 是 S 中任一收敛点列，则

$$\inf S \leqslant \lim_n x_n \leqslant \sup S.$$

3. 设 $\{z_n\}$ 是收敛的复数序列，则序列 $\{z_n^{-1}\}$ 收敛，这一命题是真还是假？

4. 下述结论是真还是假？设 x_n 收敛于 x，则 x_n 的最大整数部分收敛于 x 的最大整数部分。

5. 下述结论是真还是假？设 x_n 收敛于 x，则(向量) x_n 和 x 之间的夹角收敛于 0。

6. 设

$$x_n = 1 + 2^{-1} + \cdots + 2^{-n}$$

并且 x_n 收敛于 x，请找出满足下述条件的最小的 N：

$$|x - x_n| < 10^{-2},\ n \geqslant N.$$

7. 设 $x_n \geqslant 0$，x_n 收敛于 x，则 $\sqrt{x_n}$ 收敛于 $\sqrt{x}$。

8. 设 A 是一个方阵。讨论它的幂序列 $\{A^n\}$。证明如果 A^n 收敛于 B，则 $AB = B$。举出一个例子表明序列 $\{A^n\}$ 不收敛，但 $|A^n|$ 仍是有界的。

9. 设 z 是一个复数。证明序列

$$\frac{z^n}{n!}$$

是有界的。再从有界性证明它收敛于 0。由此再证明，对 $\varepsilon > 0$，存在常数 K，除了有限个 n 外，对其余一切 n 有

$$\frac{|z^n|}{n!} \leqslant K\varepsilon^n.$$

10. 设 S 是 R^m 的(线性)子空间，x 是 R^m 中的一个向量，$P(x)$ 是 x 在子空间 S 上的正交投影。证明如果 x_n 收敛于 x，则 $P(x_n)$ 收敛于 $P(x)$。

11. 设 $\{A_n\}$ 是 $k \times k$ 可逆矩阵的序列。假如 A_n 收敛于 A，但 A 是不可逆的。证明

$$\text{“}\lim_n |A_n| = \infty\text{”}.$$

12. 设 $x_n \in R$，x_n 收敛于 x，证明算术平均序列

$$s_n = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

也收敛于 x。

2.2 收敛准则

建立保证序列收敛的准则是很重要的事。这时，可以在不知道序列极限的情况下，确定序列的收敛性。如果序列收敛我们将有什么结论呢？一个粗糙的检验法是序列的有界性：

$$|x_n| \leqslant M, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

每一个收敛序列是有界的；因此，有界性是收敛的必要条件。但是讨论充分条件却要费一番周折。许多有界序列并不收敛。一个有意义的充分条件是从实数系的完备性导出的。

定理 2 设

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots$$

是单调增加的实数序列。序列 $\{x_n\}$ 是收敛的，充要条件是序列有界。

证明 只需证明定理的充分性。设

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant b,$$

这里 $b \in R$。于是 b 是序列值组成的集的一个上界，记 x 是该集的上确界：

$$x = \sup\{x_n; n \in Z_+\}.$$

设 $r > 0$，则 $x - r$ 不是 x_n 所成集的上界。因此，存在一个正整数 N_r，满足

$$x_{N_r} > x - r.$$

因为 $x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant x$，从而就得到

$$x-r<x_n\leqslant x<x+r,\quad n>N_r.$$

定理 2 是实数系完备性的另一形式。这正好是上确界存在性的序列形式。显然，对单调下降序列有对应的结果。

设 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 是任一有界的实数序列。对每一个 n，定义

$$a_n=\inf\{x_k; k\geqslant n\},$$

(2.8)

$$b_n=\sup\{x_k; k\geqslant n\}.$$

则我们有两个单调序列，一个增加而另一个减少：

$$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots\leqslant b_3\leqslant b_2\leqslant b_1.$$

序列 $\{x_n\}$ 的**下极限**和**上极限**定义为：

$$\liminf x_n=\lim_n a_n,$$

(2.9)

$$\limsup x_n=\lim_n b_n.$$

显然，

$$\liminf x_n\leqslant\limsup x_n.$$

等式成立的充要条件是 $\{x_n\}$ 收敛。如果序列收敛，它必收敛于 lim inf 和 lim sup 的共同值。

定理 3 设 $\{x_n\}$ 是有界的实数序列。则序列收敛的充要条件是

$$\liminf x_n=\limsup x_n.$$

如果序列收敛，它收敛于下极限和上极限的共同值。

证明 用(2.8)定义出 a_n 和 b_n。首先，设序列 $\{x_n\}$ 收敛于数 x。对给定的 $\varepsilon>0$，我们可以找到一个 N，使得

$$x-\varepsilon<x_n<x+\varepsilon,\quad n\geqslant N.$$

因此，

$$x-\varepsilon\leqslant a_n<x+\varepsilon,$$

$$x-\varepsilon \leqslant b_n \leqslant x+\varepsilon, \quad n \geqslant N.$$

由此易得

$$x=\lim_n a_n=\lim_n b_n.$$

现在，假定我们给定一个序列 $\{x_n\}$ 满足

$$\liminf x_n=\limsup x_n.$$

令 $x=\lim a_n=\lim b_n$，我们来证明 x_n 收敛于 x。设 $\varepsilon>0$，存在正整数 M，N，使得

$$x-\varepsilon<a_n<x+\varepsilon, \quad n\geqslant M,$$

$$x-\varepsilon<b_n<x+\varepsilon, \quad n\geqslant N.$$

由 a_n 和 b_n 的定义，有

$$x-\varepsilon<x_n, \quad n\geqslant M,$$

$$x_n<x+\varepsilon, \quad n\geqslant N.$$

于是，

$$|x-x_n|<\varepsilon, \quad n\geqslant \max(M, N).$$

我们经常使用记号 $\overline{\lim}\, x_n$ 和 $\underline{\lim}\, x_n$，它们分别表示 $\limsup x_n$ 和 $\liminf x_n$。试图刻划序列 $\{x_n\}$ 的上极限和下极限的几何关系，下述结论（我们仅对 lim sup 叙述）有时是有用的。如果 $s=\limsup x_n$ 和 $\varepsilon>0$，则仅对有限个 n 的值，$x_n\geqslant s+\varepsilon$，而对无限多个 n 的值，$x_n>s-\varepsilon$。

实数系的完备性显然将导出 Euclid 空间 R^m 的完备性的某种形式。完备性的序列形式可以十分方便地用 Cauchy 收敛准则的术语来描述。

我们从 R^m 的序列 $\{x_n\}$ 出发。如果 $\{x_n\}$ 收敛于点 x，由于足标充分大的各个 x_n 靠近极限点 x，因此各个 x_n 间也一定互相很接近。

定义 **Cauchy 序列**是具备以下性质的序列 $\{x_n\}$：对任一 $\varepsilon>0$，存在正整数 N_ε，使得

(2.10) $$|x_k-x_n|<\varepsilon, \quad k>N_\varepsilon, \; n>N_\varepsilon.$$

我们刚才提到，每一收敛序列是一个 Cauchy 序列。事实上，(2.10) 中的正整数 N_ε 可以这样来决定：如果 x_n 收敛于 x，选择 N_ε，使得

$$|x-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad n>N_\varepsilon.$$

这样，(2.10)就成立了。

定理 4（R^m 的完备性） R^m 中任一 Cauchy 序列必收敛。

证明 设

$$x_n=(x_{n1}, \cdots, x_{nm}), \quad n=1, 2, 3, \cdots$$

是 R^m 中点的序列。对每一个坐标 j

$$|x_{kj}-x_{nj}|\leqslant|x_k-x_n|.$$

因此，如果$\{x_n\}$是 Cauchy 序列，则对每一个 j，序列$\{x_{nj}\}$是 R 中的Cauchy 序列。假如我们证明坐标序列中的每一个序列都收敛，由定理 1 就知道序列$\{x_n\}$收敛。换句话说，我们只要在 R^1 中证明定理就行了。

设$\{x_n\}$是实 Cauchy 序列。我们如何去寻找实数 $x\in R$，使得 x_n 收敛于 x 呢？首先，序列是有界的，根据 Cauchy 条件，存在正整数 N，使得

$$|x_k-x_n|<5, \quad k\geqslant N, n\geqslant N.$$

特别，

$$|x_N-x_n|<5, \quad n\geqslant N.$$

令 M 是下列数中最大的数：

$$|x_1|, \cdots, |x_{N-1}|, 5+|x_N|,$$

于是对一切 n 有 $|x_n|\leqslant M$。

现在，令

$$x=\liminf x_n.$$

我们向读者重提它的含义：

$$a_n = \inf\{x_k; k \geqslant n\},$$

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots$$

$$x = \lim_n a_n.$$

根据实数系的完备性(定理 2)，x 是存在的，并且断定 x_n 收敛于 x。

令 $\varepsilon > 0$，我们希望证明，除了有限个 n 的值外，x_n 落在开区间 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ 内。为什么是任一 $x_n (n > N)$ 落在区间 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ 内？注意 x 的定义，可以找到这样的 N，使得

(2.11) $$x - \varepsilon < a_N \leqslant x.$$

现在，由 a_N 的定义和(2.11)，得到两件事：

(i) $x_n > x - \varepsilon$，对一切 $n \geqslant N$。

(ii) 存在某些 $k \geqslant N$，使得 $x_k < x + (\varepsilon/2)$。

(在(ii)中，可以用任意大于 x 的数代替 $x + (\varepsilon/2)$。)

现在用 Cauchy 条件。存在正整数 P，使得

(2.12) $$|x_k - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad k \geqslant P, n \geqslant P.$$

可以假定 (2.11) 中的 N 比 P 大，因为，如果对某一特殊的 N，(2.11)成立，那末它一定对大于 N 的每一数也成立。如果 $N \geqslant P$，则由(i)，(ii)和(2.12)即得

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon, \quad n \geqslant N.$$

例 4 下面是定理 3 的一个最有用的特别情形。设 $\{x_n\}$ 是一个序列，并且

(2.13) $$|x_n - x_{n+1}| < 2^{-n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

则 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列。为什么？假定 $k < n$，则

$$\begin{aligned}|x_k - x_n| &\leqslant |x_k - x_{k+1}| + |x_{k+1} - x_{k+2}| + \cdots + |x_{n-1} - x_n| \\ &\leqslant 2^{-k} + 2^{-(k+1)} + \cdots + 2^{-(n-1)} \\ &= 2(2^{-k} - 2^{-n}) < 2^{-(k-1)}.\end{aligned}$$

于是，R^m 中任一满足条件(2.13)的序列是收敛的。

例 5 对某些特定的序列，Cauchy 条件常常表示成以下形式。对点的序列 x_n 引进具有下述性质的一列集 S_1，S_2，S_3，…：

(i) $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \cdots$；

(ii) $x_n \in S_n$；

(iii) $\lim_n \operatorname{diam}(S_n) = 0$。

这里，diam(S)是集 S 的**直径**：

$$\operatorname{diam}(S) = \sup\{|x-y|; x\in S,\ y\in S\}.$$

如果集 S 是有界的，即如果 S 包含在某一以原点为中心的球内，那末集 S 的直径是有限数。显然，由(i)，(ii)，(iii) 得到 Cauchy 序列：

$$|x_k - x_n| \leqslant \operatorname{diam}(S_N), \quad k \geqslant N,\ n \geqslant N.$$

其实，存在这样的一列集正是 Cauchy 准则的另一形式。

习 题

1. 下述论断是真还是假？若 $|x_1| \geqslant |x_2| \geqslant \cdots$，则序列$\{x_n\}$收敛。

2. 举出一个序列，它满足

$$\lim_n |x_n - x_{n+1}| = 0,$$

但不是 Cauchy 序列。

3. 举出一个由有理数组成的 Cauchy 序列，使它在有理数系中不收敛。

4. 设 z 是复数，$\lim\inf|z^n|$ 是什么？

5. 下述命题成立吗？设序列$\{x_n\}$收敛，则范数的集

$$\{|x_n|; n\in Z_+\}$$

有最大元。

6. 下述命题成立吗？设无穷级数 Σx_n 收敛，则范数集

$$\{|x_n|; n\in Z_+\}$$

有属于集的最大数。

7. 设$\{x_n\}$是有界的实数序列。A是实数t所成的集，实数t满足这样的条件，仅对有限个n，成立$x_n<t$。证明

$$\liminf x_n = \sup A.$$

8. 下述命题成立吗？设z是复数，$|z|\geqslant 1$，则Σz^n发散。

9. 下述命题正确吗？设A是$k\times k$矩阵，$|A|\geqslant 1$，则ΣA^n发散。

10. 令

$$x_n=(1-2^{-1})(1-2^{-2})\cdots(1-2^{-n}).$$

证明此序列收敛，并且$\lim x_n\neq 0$。

11. 设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是有界的实数序列，证明

$$\limsup(x_n+y_n)\leqslant\limsup x_n+\limsup y_n.$$

12. 证明例4的下述推广，设$\{x_n\}$是R^m中序列，满足条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-x_{n+1}|<\infty,$$

则$\{x_n\}$是Cauchy序列。

13. 下述命题正确吗？在R^1中，任一收敛序列必是一个递增序列和一个递减序列的和。

14. 应用单调收敛定理证明，每一非空的实数集，如果它有上界，则必有上确界。

15. 如果你知道在R中每一Cauchy序列是收敛的这一定理，你如何证明单调收敛定理？(利用Archimedes有序性质。)

2.3 无穷级数

现在我们将会看到，利用上一节的收敛准则，对无穷级数可以导出什么结论。我们将讨论两类最重要的无穷级数，也就是正项级数和绝对收敛级数。

我们常用到级数的和以及数乘级数。设$\Sigma x_n=S$，$\Sigma y_n=T$，则$\Sigma(cx_n+y_n)=cS+T$。

假设无穷级数的项是非负的实数：

$$\sum_n x_n,\quad x_n\geqslant 0.$$

则部分和构成一个增加序列：

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}x_k,$$

$$s_1\leqslant s_2\leqslant s_3\leqslant\cdots$$

如果这一序列有界，由单调收敛定理它就收敛，从而(由定义)无穷级数收敛。如果序列 $\{s_n\}$ 不是有界的，它就不收敛，即无穷级数发散。

对于非负项级数的这两种可能情形，为方便起见，我们用下述记号：

$$\sum_n x_n<\infty \qquad (收敛),$$

$$\sum_n x_n=\infty \qquad (发散).$$

例 6 读者应熟悉下面两个简单例子：

$$\sum_n\frac{1}{n}, \qquad \sum_n\frac{1}{n^2}.$$

第一个级数发散，由于下列分组

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \tag{2.14}$$

第 $2n$ 个部分和超过 $(n+1)\dfrac{1}{2}$。有几种方法可以证明第二个级数收敛，其中一个方法可用数学归纳法来验证：

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}. \tag{2.15}$$

于是

$$\sum_n\frac{1}{n^2}\leqslant 2.$$

由此，一旦我们验证了 (2.15)，单调收敛定理就保证了级数的收敛性。但是它不能告诉我们级数的和是什么。其实

$$\sum_n\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

但求出它较困难。

对于非负项级数 $\sum_n x_n$，要判断它的部分和是否有界往往是不容易的。这需要有相当的智慧或经验。初学者可能会把精力浪费在判断调和级数 $\Sigma\frac{1}{n}$ 是否收敛的问题上，甚至在想到象(2.14)式那样分项以前很可能误认为调和级数是收敛的。验证了不等式(2.15)，我们就证明了

$$\sum_n \frac{1}{n^2}<\infty.$$

但是，当我们考察一个无穷级数时，我们往往不容易想到这样的不等式。

如果我们积累了许多特殊级数的收敛或发散的资料，对于新的级数，就可以利用它和已知级数作比较的办法来检验它的收敛性。如果

$$\sum_n y_n<\infty,$$

并且 $0\leqslant x_n\leqslant y_n$，显然

$$\sum_n x_n<\infty.$$

其实，只要对充分大的 n，有 $x_n\leqslant y_n$ 就足够了，即

$$x_n\leqslant y_n,\quad n\geqslant N.$$

同样，如果

$$\sum_n y_n=\infty,$$

并且对一切充分大的 n，有 $x_n\geqslant y_n\geqslant 0$，则 Σx_n 发散。

例 7 在 2.1 节，对一切绝对值小于 1 的复数，证明过级数 Σz^n 收敛：

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n,\quad |z|<1.$$

特别，

(2.16) $$\sum_n x^n < \infty, \quad 0 \leqslant x < 1.$$

通过把级数的项与几何级数(2.16)的项相比较，可以断定许多级数的收敛性。例如，

(2.17) $$\sum_n \frac{n^2}{2^n} < \infty.$$

由于，对充分大的 n，有

(2.18) $$\frac{n^2}{2^n} < \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

为什么？不等式(2.18)就是

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n n^2 < 1,$$

对充分大的 n，这个不等式是正确的。因为对任一固定的 t，若满足 $0 \leqslant t < 1$，则有

$$\lim_n n^2 t^n = 0.$$

最后的论断可以证明如下。因为

$$\lim_n \frac{n}{n+1} = 1,$$

并且 $0 < t < 1$，则存在 N，使得

$$t < \left(\frac{n}{n+1}\right)^2, \quad n \geqslant N.$$

这一不等式可写作

$$(n+1)^2 t^{n+1} < n^2 t^n, \quad n \geqslant N.$$

于是对大的 n，序列 $\{n^2 t^n\}$ 单调减少，因此它收敛。如果极限不是 0，我们可采用除法，于是得到矛盾：

$$1 = \frac{\lim n^2 t^n}{\lim (n+1)^2 t^{n+1}}$$

$$= \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 t^{-1} = t^{-1}.$$

读者将发觉级数

$$\sum_n \frac{x^n}{n!}$$

对每一实数 x 收敛。目前，我们只考虑非负数 x。如果 $0 \leqslant x < 1$，级数显然收敛。级数对大的 x 也收敛，这一点是有意义的。固定一个 x，当 n 取大的数时

$$\frac{x^n}{n!}$$

将发生什么情况呢?其实，级数的第$(n+1)$ 项是由第 n 项乘以 $x/(n+1)$而得，选择 n 足够大，使得 $n+1>x$，于是第$(n+1)$ 项是第 n 项乘上一个小于 1 的数，显然级数收敛，而且它比几何级数收敛得快。下面是严格的叙述。给定 x，选择正整数 N，使得

$$\frac{x}{N+1} = t < 1.$$

则

$$\begin{aligned}
\sum_n \frac{x^n}{n!} &\leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \geqslant N+1} \frac{x^n}{n!} \\
&\leqslant \sum_{1}^{N} \frac{x^n}{n!} + \frac{x^N}{N!} \sum_{1}^{\infty} t^k \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

我们刚才讨论的那个级数是指数函数的幂级数，关于它我们还要说几句。当 $x=1$时，读者一定很熟悉，它定义了数 e：

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

关于非负级数，从单调收敛定理得到了一些结论。对无穷级数，让我们从 Cauchy 收敛准则出发，看看能推出些什么。设有一个(向量值的)级数，它的项是 x_n，部分和是 S_n：

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

根据定义，如果序列 $\{S_n\}$ 收敛，那末级数就收敛。由定理 4，级数

收敛当且仅当 $\{S_n\}$ 是 Cauchy 序列。对 S_k 和 $S_n(n>k)$ 之间的距离作粗糙的估计：

$$|S_k - S_n| = |x_{k+1} + \cdots + x_n| \leqslant |x_{k+1}| + \cdots + |x_n|.$$

倘若 k 和 n 都较大，怎样才能保证最后的和式很小呢？要求

$$|x_{k+1}| + \cdots + |x_n| < \varepsilon, \quad N \leqslant k < n,$$

只要有

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n| \leqslant \varepsilon \tag{2.19}$$

就可以了。那末，对每一 $\varepsilon>0$，是否存在这样的 N，使得 (2.19) 成立？这只要下述数项级数收敛就行：

$$\sum_n |x_n| < \infty \tag{2.20}$$

使(2.20)成立的无穷级数，称为**绝对收敛**。综上所述，得到下面的结论：如果 R^m 中的一个无穷级数绝对收敛，则它必收敛。但反之不然，有许多级数收敛但并不绝对收敛。从这个意义上可以说，绝对收敛级数是一个“真正地”收敛的级数，因为对这样的级数，我们就能说级数的和正好是全部向量 x_n 的和。在求和以前，我们可以按任何方式交换和结合这些向量，理由如下。

设有一个绝对收敛级数 $\sum x_n$，其和 S 总满足

$$\left| S - \sum_{1}^{n} x_k \right| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} |x_k|.$$

其实，设 A 是正整数的任一个子集，那末也有

$$\left| S - \sum_{k\in A} x_k \right| \leqslant \sum_{k\notin A} |x_k|. \tag{2.21}$$

这一事实对一切可能的排列亦成立。设 $A_1, A_2, \cdots$ 是正整数的子集的序列，使得每一个正整数 n 都在某一个 A_k 内：

$$Z_+ = \bigcup_n A_n,$$

$$A_n \cap A_k = \varnothing, \quad n \neq k.$$

对每一个 n，因为

$$\sum_{k \in A_n} |x_k| \leqslant \sum_k |x_k| < \infty,$$

所以级数

$$\sum_{k \in A_n} x_k$$

绝对收敛，并且还可以断言

$$\sum_k x_k = \sum_n \left(\sum_{k \in A_n} x_k \right).$$

换句话说，如果

$$y_n = \sum_{k \in A_n} x_k,$$

则级数 $\sum_n y_n$ 收敛，并且

$$\sum_n y_n = S = \sum_k x_k.$$

这一结论可以从(2.21)直接得到：

$$|S - y_1| \leqslant \sum_{k \notin A_1} |x_k|,$$

$$|S - (y_1 + y_2)| \leqslant \sum_{k \notin (A_1 \cup A_2)} |x_k|, \cdots$$

例 8 对于一个收敛但不是绝对收敛的级数，在求级数的和时，如果重新排列级数项的次序或用某些方式去组合级数的项，必须十分谨慎。例如，交错调和级数

$$\sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$$

收敛(见习题 4)，然而，我们不能用下法求和：

$$\sum_{n=\text{偶数}} x_n + \sum_{n=\text{奇数}} x_n,$$

因为，这两个级数都发散。下列事实是著名的，但我们不打算证明它。设 $\sum_n x_n$ 是由实数组成的无穷级数，它收敛而不绝对收敛。那末，把它的项重新排列可以产生发散级数；而且不仅如此，对任一

实数 s，还可以重新排列级数的项，使所作出的级数收敛于 s。因此，除去绝对收敛级数外，我们不能把级数的和当作"全部项的和"。

例 9 设 A 是以复数为元素的 $k\times k$ 矩阵。设 $|A|<1$，则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n \quad (A^0=I)$$

绝对收敛，因为 $|A^n|\leqslant|A|^n$，$n\neq 0$。它收敛于

$$\frac{1}{I-A}.$$

但是，这含义还不够确切。确切的含义是它为矩阵 $I-A$ 的逆矩阵。设

(2.22) $$B=\sum_{0}^{\infty} A^n, \qquad |A|<1.$$

容易验证

(2.23) $$B(I-A)=(I-A)B=I.$$

也就是说，$I-A$ 是可逆的，并且 $B=(I-A)^{-1}$。

设 A 是以复数为元素的 $k\times k$ 矩阵，定义 A 的**指数**为

(2.24) $$\exp(A)=e^A=I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots$$
$$=\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n.$$

这一级数绝对收敛，因为（见例 7）

$$\sum_{1}^{\infty}\left|\frac{1}{n!}A^n\right|\leqslant\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n!}|A|^n=e^{|A|}-1.$$

如果 B 是矩阵，它与矩阵 A 可交换：$AB=BA$，则我们可以证明

$$e^{(A+B)}=e^Ae^B=e^Be^A.$$

对任一固定的矩阵 M

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^nM=e^AM.$$

于是

$$e^A e^B = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} A^n e^B$$

$$= \sum_0^\infty \frac{1}{n!} A^n \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} B^k \right).$$

因为

$$\sum_n \sum_k \frac{1}{n!} \frac{1}{k!} |A^n B^k| < \infty,$$

重新组合一下，得到

$$e^A e^B = \sum_{N=0}^\infty \sum_{k+n=N} \frac{1}{k!n!} A^n B^k.$$

由于 $AB = BA$，这就是说

$$e^A e^B = \sum_N \frac{1}{N!} (A+B)^N = e^{(A+B)}.$$

习 题

1. 设 x 和 t 是任意正实数，对一切充分大的 n，证明

$$\frac{x^n}{n!} < t^n.$$

2. 下述命题成立吗？设 $0 \leqslant t < 1$，则

$$\sum_n n! t^{n^2} < \infty.$$

3. 根据上述两题，当 n 取大数时，关于 $n!$ 的 n 次根的性质你能说些什么？

4. 设 $\{x_n\}$ 是非负实数序列，它单调收敛于 0。证明无穷级数

$$\sum_n (-1)^n x_n$$

收敛。

5. 设 $\sum x_n$ 是 R^k 中向量所成的绝对收敛级数，$\{y_n\}$ 是 R^k 中向量的有界序列。证明数项级数

$$\sum_n \langle x_n, y_n \rangle$$

绝对收敛。

6. 证明不等式 (2.21)，亦即：如果 $A \subset Z_+$，则 $\sum_{k \in A} x_k$ 收敛，并成立 (2.21)。

7. 设 $\{x_n\}$是 R^k 中向量的序列，满足

$$\sum_n |x_n - x_{n+1}| < \infty,$$

证明序列 $\{x_n\}$收敛。(这样的序列称为快速 Cauchy 序列。)

8. 利用和几何级数作比较的方法，证明复(有界)序列 $\{x_n\}$具有下述性质：

(a) (比式判别法)设

$$s = \limsup \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right|,$$

则当 $s<1$ 时，级数$\sum_n x_n$ 绝对收敛。

(b) (根式判别法)设

$$t = \limsup \sqrt[n]{|x_n|},$$

则当 $t<1$ 时，级数 $\sum_n x_n$ 绝对收敛，当 $t>1$ 时，级数发散。

9. 对级数

$$\sum_n n^{-(3/2)},$$

用归纳法验证

$$s_n \leqslant 3 - 2n^{-(1/2)},$$

从而证明这一级数收敛。

10. 设 $\{x_n\}$ 是正数的单调减少序列。证明 $\sum_n x_n$ 收敛当且仅当

$$\sum_k 2^k x_{2^k}$$

收敛。

11. 利用第 10 题的结果研究下述级数的收敛性：

$$\sum_n n^{-q}, \quad q>0.$$

12. 设 $x_1, x_2, \cdots$是非负数所成的任意序列，满足条件

$$\sum_n x_n < \infty,$$

证明必存在正整数 $N_1, N_2, \cdots$，具备以下性质：

(i) $N_1 \leqslant N_2 \leqslant N_3 \leqslant \cdots$;

(ii) $\lim_k N_k = \infty$，即$\{N_k\}$是无界的；

(iii) $\sum_k N_k x_k < \infty$.

13. 证明对一切实数 x，有

$$e^x \geqslant 1+x.$$

可按下述次序来验证：

$$e^x \geqslant 1+x, \qquad x \geqslant 0,$$

$$e^x \leqslant \frac{1}{1-x}, \qquad 0 \leqslant x < 1,$$

$$e^x \geqslant 1+x, \qquad x \geqslant -1,$$

$$e^x \geqslant 1+x, \qquad x \in R.$$

14. 利用第13题结果证明，对一切复数 z，$|z|<1$，有

$$\exp\left(\frac{|z|}{|z|-1}\right) \leqslant |1+z| \leqslant \exp(|z|).$$

15. 设 A 是 $k \times k$ 矩阵，证明矩阵 e^A 是可逆的。

16. 设 A 和 B 是范数小于1的 $k \times k$ 矩阵，建立 $(I-AB)^{-1}$ 和 $(I-BA)^{-1}$ 之间的简单关系。在什么情况下，这一关系式对一切 A 和 B 成立？

17. 设 $\{w_n\}$ 是复序列，

$$\prod_n w_n$$

是无穷乘积。如果部分积的序列

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} w_k = w_1 w_2 \cdots w_n$$

收敛于非零数 w，则称无穷乘积收敛。利用第7题和第13题的结果证明：设 $\{z_n\}$ 是复 $(z_n \neq -1)$ 序列，并且

$$\sum_n |z_n| < \infty,$$

则无穷乘积

$$\prod_n (1+z_n)$$

收敛。

18. 设 Σx_n 是实数项级数，它收敛而不绝对收敛。证明，若 t 是一个实数，则可以把级数的项重新排列，使排好的级数收敛于 t。（提示：从级数中取足够多的正项，使它们的和略大于 t，接着又取足够多的负项，使它们的和正好小于 t，等等。）

*19. 设 Σx_n 是 R^m 中的向量级数，它收敛而不绝对收敛。把级数的项重新排列所得级数的和是一向量。试问，对应于种种不同排列的级数之和所

成的向量集 S 是何种类型的集？

*20. 对一切 $k\times k$ 复矩阵 A，证明

$$\det e^A = e^{\operatorname{tr}(A)}$$

（det 表示行列式函数，tr 表示迹函数。）

2.4 序列的紧性

对序列 $\{x_n\}$ 来说，如果对一切充分大的 n，x_n 和 x 靠近，那末这一序列就收敛于点 x。但在许多场合，我们无需知道它的收敛性，我们仅需知道序列存在一个聚点，也就是存在无限多个 n，使 x_n 和 x 靠近。

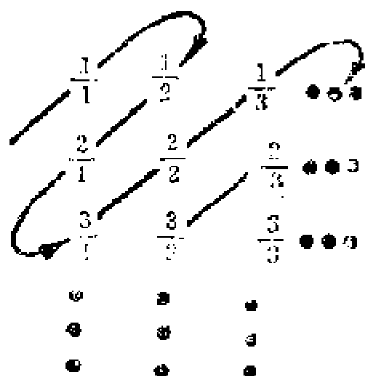
定义 如果 x 的每一个邻域包含无限多个 n 所对应的 x_n，则称点 x 为**序列 $\{x_n\}$ 的聚点**。

我们可以换个方式来说：如果对任一 $\varepsilon>0$ 和每一个正整数 n，必存在某个 $k>n$，使得

$$|x-x_k|<\varepsilon,$$

则称 x 是 $\{x_n\}$ 的聚点。如果 $\{x_n\}$ 收敛于 x，则这个序列只有唯一的聚点 x。

例 10 设 r_1，r_2，r_3，…是正有理数所组成的序列，按下列方式排列：



则任一非负实数是序列$\{r_n\}$的聚点。

例 11 当我们利用坐标来讨论聚点时要仔细。例如，在R^2中考虑：

$$x_n=(0,\ 1),\qquad n\text{ 是奇数},$$
$$x_n=(1,\ 0),\qquad n\text{ 是偶数}.$$

第一个坐标序列是 0, 1, 0, 1, …，在R中它有两个聚点 0 和 1，第二个坐标序列是 1, 0, 1, 0…，它有同样的聚点。特别，0 是第一个坐标的聚点，也是第二个坐标的聚点，但是我们不能断定 (0, 0) 是R^2中序列的聚点。

定义 设有两个序列$x_1, x_2, x_3\cdots$和$y_1, y_2, y_3\cdots$，如果存在正整数$n_1, n_2, n_3, \cdots$，使得

(i) $n_1<n_2<n_3<\cdots$;

(ii) $y_k=x_{n_k}$,

就称$y_1, y_2, y_3, \cdots$是$x_1, x_2, x_3, \cdots$的**子序列**。

换句话说，$\{x_n\}$的子序列是任一序列$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots$，而$n_1<n_2<\cdots$。通常就说$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的一个子序列。在这一陈述中，总算把子序列讲清楚了。

引理 点x是序列$\{x_n\}$的聚点的充要条件是$\{x_n\}$存在某个子序列收敛于x。

证明 只要注意到，如果x是一个聚点，则必有某一n_1，使

$$|x-x_{n_1}|<1,$$

并且有无限多个n_2，满足

$$|x-x_{n_2}|<\frac{1}{2},$$

从这无限多个中选定一个，使$n_2>n_1$。按此方式继续进行下去，得到

$$|x-x_{n_k}|<\frac{1}{k},$$

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

实数系的完备性保证了 R^m 中有界序列有聚点。一个序列可以散乱无章，然而，只要它在 R^m 中有一个有界的部分，就必然在某处凝聚。这一性质常叫做 R^m 中有界部分的"序列紧性"。

定理 5 (Bolzano-Weierstrass) R^m 中的任一有界序列必有聚点。等价地，R^m 中任一有界序列必有收敛子序列。

证明 我们将采用坐标来证明它，但根据例 11，应小心谨慎。设序列是

$$x_n = (x_{n1}, \cdots, x_{nm}),$$

由于 $|x_{nj}| \leqslant |x_n|$，m 个坐标序列的每一个都是有界的。假如对 R^1 中有界序列已证明了本定理，对 R^m 的证明可按下法来做。选择一个子序列 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots$，使它的第一个坐标在 R^1 中收敛。这一子序列是有界的。因此，对第二个坐标它有一个收敛的子序列。这一新序列具有这样的性质，向量的第一个坐标列收敛，向量的第二个坐标列也收敛。经过有限步以后，即可得到一个子序列，它的每一个坐标序列都收敛。

于是，只要对 R^1 中的有界序列 $\{x_n\}$ 证明定理就可以了。这是容易的，因为序列的下极限是序列的一个聚点。如果我们不希望引用概念，不妨直接定义

$$x = \sup\{t; x_n \geqslant t, \quad \text{对无限多个} n\},$$

再验证 x 是序列的聚点。

系 R^m 中有界序列收敛的充要条件是它恰好有一个聚点。

我们概述一下 Bolzano-Weierstrass 定理的另一证明，该证明略为直观些。取一个有界序列，用非零数量去乘它，使它成为闭区域：

$$B = \{x; 0 \leqslant x_j \leqslant 1, \ j = 1, \cdots, m\}$$

中的新序列。因此，我们不妨假设给定的序列就在 B 中。这个闭

区域是单位闭区间的m重 Cartesian 积，

$$B=I\times\cdots\times I$$
$$=\{x; x_j\in I,\ 1\leqslant j\leqslant m\}.$$

现在，在每一坐标轴上把I切成两半，于是B是2^m个闭区域的并集，而每一个闭区域是m个闭区间的 Cartesian 积

$$J_1\times\cdots\times J_m=\{x; x_j\in J_j,\ 1\leqslant j\leqslant m\}.$$

每一个J_j是$\left[0,\frac{1}{2}\right]$或$\left[\frac{1}{2},1\right]$中的一个。这$2^m$个闭区域有重叠的部分，但这一点没有关系，要紧的是这些闭区域中必有一个包含无限多个正整数所对应的x_n。从这样的闭区域中选出一个叫做B_1。象分割B一样，把B_1分成2^m个闭区域，设B_2是一个闭区域，它包含无限多个正整数所对应的x_n(见图 4)。这种分法一直进行下去，就得到一列闭区域的序列套：

$$B_1\supset B_2\supset B_3\supset\cdots$$

它们中的每一个都含有无限多个正整数所对应的x_n，并且B_n的边长是2^{-n}，特别

$$\lim_n \operatorname{diam}(B_n)=0.$$

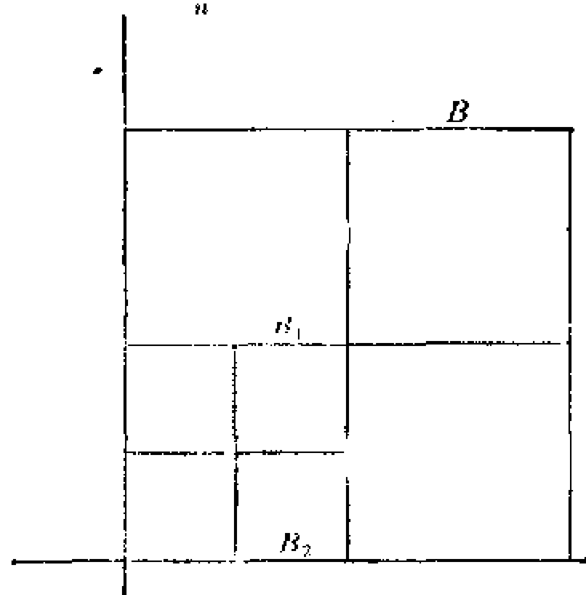


图 4

显然，我们可以选择 $n_1 < n_2 < \cdots$ 使得

$$x_{n_k} \in B_k.$$

因此，这个子序列是 Cauchy 序列并且收敛(例 5)。

在选定 B_n 以后，我们也可以不用 Cauchy 准则，而对每一坐标应用区间套定理。

习　题

1. 证明，在 R^1 中的有界序列有最小的聚点和最大的聚点，它们就是 $\lim\inf x_n$ 和 $\lim\sup x_n$。

2. 设 z 是绝对值为 1 的复数：

$$z = e^{i\theta}, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

序列 $\{z^n\}$ 的聚点是什么？要区别下面两种情形：θ 是 2π 的有理数倍和 θ 不是 2π 的有理数倍。

3. 设 $\{x_n\}$ 是序列，令 $y_1, y_2, \cdots$ 是 $\{x_n\}$ 的聚点的序列。证明序列 $\{y_n\}$ 的任一聚点是序列 $\{x_n\}$ 的聚点。

4. 设 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列，并且有某一个子序列收敛于 x，则 $x = \lim x_n$。

5. 设 $\{x_n\}$ 是有界的实数序列，使得对每一个 n，$|x_n - x_{n+1}| = 1$。证明该序列仅有有限个聚点。

6. 设 $\{x_n\}$ 是有界的实数序列，且对每一个 n，有 $|x_n - x_{n+1}| \geqslant 1$，它可以有无限个聚点吗？

7. 设 $\{x_n\}$ 是有界的实数序列，并满足

$$\lim_n \sup x_n < \sup_n x_n.$$

证明在数 x_n 中有一个最大数。

8. 举出一个复数序列 $\{z_n\}$，$|z_n| < 1$，并满足

(a) $|z| < 1$ 的任一点 z 都不是序列的聚点；

(b) $|z| = 1$ 的任一点 z 都是序列的聚点。

*9. 下述命题正确吗？设 A 是 $k \times k$ 复矩阵，则序列 $\{A^n\}$ 的一切聚点所成的集是有界的。

2.5 开集和闭集

本节标题提到两个十分特殊的集类。在 Euclid 空间中，没有它们也可进行分析，但这就会失去不少东西。开集和闭集的概念阐明了收敛性问题和射影几何学中的问题。

定义 如果 R^m 中的集U是它的每一个点的邻域，就称 U 为**开集**。

于是,U 是开集当且仅当满足以下条件：对U内的每一点 x，存在正实数 r，使开球 $B(x, r)$全部包含在U内。

定理 6 任意个开集的并集是开集，任意有限个开集的交是开集。

证明 设$\{U_\alpha\}$是一族开集，令

$$U=\bigcup_\alpha U_\alpha$$

如果 $x\in U$，则必有一 α，使 $x\in U_\alpha$。于是 U_α 是 x 的邻域。因为U包含 U_α，所以U是x的邻域。

设 $U_1, \cdots, U_n$ 是开集，令

$$U=\bigcap_k U_k.$$

若 $x\in U$，对每一个 k，$1\leqslant k\leqslant n$，则必有数 $r_k>0$，使得

$$B(x;r_k)\subset U_k.$$

取 r 是 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 中的最小数，则

$$B(x;r)\subset U.$$

定理 6 其实很普通，由于它叙述了开集的常用性质，才称它为一个定理。

例 12 每一个开球 $B(x;r)$ 都是开集。如果 $y\in B(x;r)$ 则 $B(y;t)\subset B(x;r)$，这里

$$t=r-|x-y|.$$

于是，任意个开球的并集

$$\bigcup_{\alpha} B(x_\alpha; r_\alpha)$$

是开的．进而可知，每一个开集都是这种类型的，即开集是它所包含的那些开球的并集。

例 13 察看一下 R^1 中开集。每一个开区间(a, b)是 R^1 中开集。但是区间$(a, b]$不是 R^1 中开集，因为 $b\in(a, b]$，但是不存在含有 b 的开区间，使它包含在$(a, b]$内。无界区间(a, ∞)是 R^1 中开集。

R^1 中任一开集是开区间(a,b)的并集。在一维情形，开集U可用很特殊的方式表达成区间的并集，这是由于在 R^1 中的开区间具有特别的性质：如果几个开区间有公共点，则它们的并集是开区间（参见习题11）。在开集U中任取一点x，设 I_x 是包含这点的那些开区间的并集，并包含在集U内。则 I_x 是开区间（可能是无界的）。因此，对每一个$x\in U$，有一个包含x而含在U内的最大的开区间 I_x。如果 $y\in I_x$，则有 $I_y=I_x$。换句话说，在 I_x 内的一切点属于U内的同一个最大区间，它就是 I_x。因而，设$x, y\in U$，则或者 $I_x=I_y$，或者 I_x 和 I_y 的交是空集。那末不相同的区间 I_x 有多少个呢？只有可列个（见习题12和附录）。于是 R^1 中任一开集可唯一表达成互不相交的可列个开区间的并集。

例 14 考察 $k\times k$（实或复)矩阵空间。设U是全体可逆矩阵的集，亦即矩阵A存在 A^{-1}，使得 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$。那末，U 是开集吗？对此可说些什么呢？我们将这样说：若矩阵A是可逆的，则任一（充分）靠近A的矩阵也是可逆的。在前面例 9 中曾证明，每一个和单位阵靠近的阵是可逆的：设 $|T|<1$，则

$$(I-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} T^n,$$

或者如果$|I-S|<1$，则

$$S^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(I-S)^n.$$

所以，可能U是开的。若A是可逆的，要保证B也是可逆的，则B和A的接近程度应如何呢？现在

$$A-B=A(I-A^{-1}B),$$

或

$$I-A^{-1}B=A^{-1}(A-B).$$

于是，

$$|I-A^{-1}B|\leqslant|A^{-1}||A-B|.$$

设

$$|A-B|<\frac{1}{|A^{-1}|},$$

则

$$|I-A^{-1}B|<1;$$

因此，$A^{-1}B$是可逆的，由于A^{-1}可逆，故B也可逆。综上所述，可逆矩阵集是开集，因为如果$A\in U$，则U包含以点A为中心半径为$|A^{-1}|^{-1}$的开球。

定义 如果x的每一邻域包含S中不同于x的点，称点x是**集S的聚点**。

引理 设S是R^m的子集，而$x\in R^m$，则下列陈述是等价的(同时成立或同时不成立)。

(i) x是集S的聚点。

(ii) x的任一邻域包含S中无限个点。

(iii) 在S中存在序列$\{x_n\}$，使得$x_n\neq x$，并且$x=\lim\limits_n x_n$。

证明 留作习题。

读者可以注意到"集的聚点"和"序列的聚点"这两个概念的类

似之处，而弄明白这两者的关系也是重要的。设 $\{x_n\}$ 是 R^m 中序列，则它的象

$$S=\{x_n; n\in Z_+\},$$

是 R^m 的子集，它是由序列中一切不同向量所组成的集。如果 x 的每一邻域都包含 S 的无限多个点，点 x 就是 S 的一个聚点。这样的 x 当然是序列的聚点，因为每一个邻域如果包含了 S 中无限个点，必定也包含无限多个 n 值所对应的 x_n。但另一方面，若 y 是序列的聚点，它未必是集 S 的聚点。看一个简单例子就明白了。实数序列

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots$$

有两个聚点，0 和 1。序列的象集是 $S=\{0, 1\}$，它根本没有聚点。如果序列 $\{x_n\}$ 的一切项都不相同，则序列的每一个聚点也都是 S 的聚点。

数学的许多部分常用到序列的聚点，极限点和集的聚点，注：原文用"accumulation"表示序列的聚点，用"cluster"表示集的聚点，因此在上段中才讨论了它们的区别。

定义 如果集 K 的每一个聚点都属于 K，则称 K 是**闭集**。

闭集是对于取极限运算封闭的集。从上一引理得到，对于集 K，下述条件是等价的：

(i) K 是闭集

(ii) 设 $\{x_n\}$ 是 K 中收敛点列，则它的极限属于 K。

定理 7 集 S 为开集当且仅当它的余集是闭集。

证明 设 T 是 S 的余集：

$$T=\{x\in R^m; x\notin S\}.$$

我们只要考虑以下事实就行了：所谓 T 是闭集，就是说，如果 $x\notin T$ 则 x 不是 T 的聚点。

系 任意个闭集的交集是闭集。任意有限个闭集的并集是闭

集。

证明 利用定理6和7即可得到。叙述第一个结论的证明。设$\{K_\alpha\}$是闭集族。对每一α，设U_α是K_α的余集。则每一U_α是开集，而并集

$$U=\bigcup_\alpha U_\alpha$$

也是开集。这一并集是

$$K=\bigcap_\alpha K_\alpha$$

的余集，而K是集U_α的余集的交。因为U是开的，故K是闭的。

闭球和闭区间是闭集。根据定理7，不需要专门讨论闭集的例子。每一个开集的例子都提供了一个闭集的例子（反过来也一样）。但是要记住，我们也可以不通过开集来认识闭集。

例15 我们经常提到著名的Cantor集，下面介绍它。从R_1中闭区间$[0,1]$出发，从中取出中间的长为$\frac{1}{3}$的开区间，即开区间$\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$。剩下的是两个不相交的闭区间的并集。再分别从留下来的这两个区间的每一个中取出中间长为$\frac{1}{3^2}$的开区间(见图5)，然后，再从留下来的四个闭区间的每一个中取出中间的长度为$\frac{1}{3^3}$的开区间。这样无限地进行下去，留下来的就是Cantor集K。

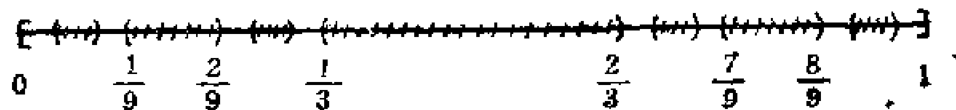


图 5

K是从$[0,1]$中去掉一个开集U，这个开集是以下开区间序列的并集：$\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$，$\left(\frac{1}{9},\ \frac{2}{9}\right)$，$\left(\frac{7}{9},\ \frac{8}{9}\right)$，…。因为$U$是开

集，[0, 1]是闭集，所以

$$K=\{x\in[0,1];\ x\notin U\}$$

是闭集。集K是十分薄的，把U中开区间的长加起来：

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{9}+4\cdot\frac{1}{27}+\cdots&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\\&=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-1}-1\right]\\&=1.\end{aligned}$$

但是，K却含有许多点——不可列个点。特别，那些删去的区间的端点显然属于K，但是K包含的点比这些端点更多。

我们十分细仔地来描述 Cantor 集，我们把区间[0, 1]的点用三进制小数来表示，它是一个级数的和：

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n3^{-n},$$

这里数字a_n是0，1或2。这一数字a_n是根据x在区间序列中的位置定义的，这些区间的长度以每次乘$\frac{1}{3}$的速率减少

$$\begin{aligned}a_1&=\sup\{k\in Z;\ \frac{k}{3}\leqslant x\},\\a_2&=\sup\{k\in Z;\ a_13^{-1}+k3^{-2}\leqslant x\},\\&\ \ \vdots\\a_n&=\sup\{k\in Z;\ a_13^{-1}+\cdots+a_{n-1}3^{-(n-1)}+k3^{-n}\leqslant x\},\\&\ \ \vdots\end{aligned}$$

Cantor 集包含一切这样的点x，在x的三进制小数表示中，数字仅取0或2(没有1)。因此，K中含有区间[0, 1]中的许多点：在映射(函数)

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n3^{-n}\longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}2^{-n}\quad(a_n=0\text{ 或 }2)$$

下，K 的象覆盖了$[0, 1]$。

R^m 的"序列紧性"可用本节语言再叙述一下，着重讲两条。

定理 8 (Bolzano-Weierstrass) R^m 的任一有界而无限的子集必有一聚点。

证明 设 S 是一个无限集，可以从 S 中挑选出一个点序列 x_n，当 $k\neq n$ 时，有 $x_k\neq x_n$ (不同点的序列)。对这样的序列，"包含无限多个 x_n"就是"包含无限多个 n 所对应的 x_n"。

定理 9 设

$$K_1\supset K_2\supset K_3\supset\cdots$$

是 R^m 中的有界闭集组成的序列套。如果每一 K_n 是非空的，则交

$$\bigcap_n K_n$$

集非空。

证明 对每一个 n，在 K_n 中存在点 x_n。序列 $\{x_n\}$ 有界，因此有聚点 x。由于对 $k\geqslant n$ 有 $x_k\in K_n$，又由于 K_n 是闭的，x 必在 K_n 内。

下面是一个有趣的应用。

例 16 一个善于分析的数学工作者可以通过下述方法来证明三角形的三条中线交于一点。设 X, Y, Z 是三角形 ABC 各边的中点。于是，由三角形的相似有(i) 三角形 ABC 的中线也是三

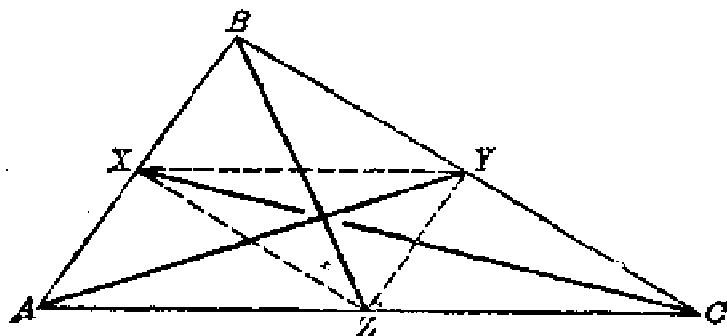


图 6

角形 XYZ 的中线，(2) $\operatorname{diam}\triangle XYZ=\frac{1}{2}\operatorname{diam}\triangle ABC$ (见图 6)。用三角形 XYZ 代替三角形 ABC，并重复上面的做法，这样一直进行下去，定理 9 此时变成了什么呢？

我们可以认为定理 9 用几何方式叙述了 Bolzano-Weierstrass 定理。在定理 9 中如果知道 $\operatorname{diam}(K_n)$ 收敛于 0，则一切 K_n 的交正好只有一点。这一结果比定理 9 要弱，它本质上是 R^m 中每一 Cauchy 序列收敛这一事实的另一说法。

习　题

1. 证明 R^m 和空集是 R^m 中两个又开又闭的子集。

2. 设 S 是 R^m 中子集，S 既开又闭，则或者 $S=R^m$ 或者 S 是空集（可以先在 R 中证明。）。

3. 设 S 是 R^m 的子集，S 的一切闭子集的并是什么？

4. 下面的复数集哪一些是闭的？哪一些是开的？

(a) 一切满足条件 $z=z^*$ 的 z；

(b) 一切满足条件 $zz^*>2$ 的 z；

(c) 一切满足条件 $|z|\leqslant 1$ 且 $z\neq 0$ 的 z；

(d) 一切满足条件 $|z|$ 是有理数的 z。

5. 下述命题成立吗？设 S 是闭集，则 S 包含 S 的聚点。

6. 下述结论成立吗？设 S 是 R 的有界无限子集，则 S 的聚点中有一个是最大的。

7. 下述命题成立吗？设 S 的任一子集是闭的，则 S 只含有限个点。

8. 下述命题成立吗？设 S 的任一子集是开的，则 S 只含有限个点。

9. 设 S 是一个集，S 的 x_0 **平移**是 $x_0+S=\{x_0+y;\ y\in S\}$。证明开集的每一个平移是开集，闭集的每一个平移是闭集。

10. 关于开集(闭集)的数量倍数，你能说些什么？

11. 设 $\{I_\alpha;\alpha\in A\}$ 是实直线上的开区间族，并且交集

$$\bigcap_\alpha I_\alpha$$

非空，则并集是一个开区间(注意区间的定义。)。

12. 设$\{I_\alpha, \alpha\in A\}$是实直线上的一族开区间，它们两两不相交：

$$I_\alpha\cap I_\beta=\varnothing,\quad \alpha\neq\beta,$$

证明A是可列集。

13. 设A是R^m的子集，B是R^n的子集。Cartesian 积$A\times B$是R^{m+n}的子集。证明

(a) 设A和B是开集，则$A\times B$也是开集。

(b) 设A和B是闭集，则$A\times B$也是闭集。

14. 由$k\times k$正交矩阵组成的集是开集吗?

15. 设M是R^m的线性子空间，K是R^m的闭子集。把集K正交投影到M上，所产生的集是闭集吗?

16. R^m的任一(线性)子空间是闭集。

17. 如果集K是闭的，并且K中每一点都是K的聚点，就称K是**完全集**。证明 Cantor 集是一个完全集。

*18. 任一非空完全集是不可列集。

*19. 任一闭集是一个完全集和可列集的并集。

2.6 闭包和内部

设S是R^m的子集。一切包含S的闭集的交称为S的**闭包**。一切包含在S内的开集的并集称为S的**内部**。S的**边界**是S的闭包和S余集的闭包的交集。

我们将用$\bar{S}$来记S的闭包。显然$\bar{S}$是闭集，它是包含S的最小闭集。设x是R^m中的点，则下述条件是等价的：

(i) $x\in\bar{S}$。

(ii) $x\in S$或x是S的聚点这两件事必有一件成立。

(iii) 在S中存在收敛于x的点序列。

我们用S°记S的内部（虽然我们不大使用这记号）。显然，S°是一个开集，它是S的最大开子集。对于点x，下列条件是等价的：

(i) $x\in S^\circ$。

(ii) 某一开球 $B(x;r)$ 含在 S 内。

(iii) 在 S 的余集中，不存在收敛于 x 的任何点序列。

对于点 x，下列条件等价：

(i) x 在 S 的边界上。

(ii) x 的任一邻域包含 S 的点，也包含 S 的余集的点。

例 17 考虑开球 $B(x_0;r)$。它是开集，因此它等于它的内部。B 的闭包是闭球 $\bar{B}(x_0;r)$。B 的边界是以 x_0 为中心，半径为 r 的球面：

$$S(x_0;r)=\{x;\,|x-x_0|=r\}。$$

在 R^2 中，"球面"是一个圆。在 R^1 中，"球面" 是区间 B 的两端点。

例 18 我们考察 R^2 的一些子集。为了理解闭包、内部和边界，一般从图 7 所示的集 S 开始。设 x 是 S° 中的点，y 是 S 的边界上的点，z 不属于 $\bar{S}$。特别，设 S 的边界是一条曲线，不论 S 是开区域还是闭区域，它都由这条曲线所围成。对这两种区域来说，它们的内部，闭包和边界都是相同的。这两种类型的区域都是很特殊的集。通过这些观察，我们现在可以说，性质最好的集是这样的集，它是闭的，有界的，并且等于它的内部的闭包。

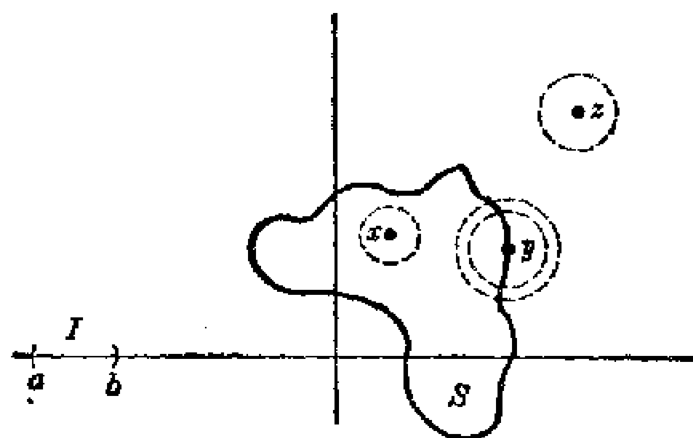


图 7

在同一个图中，从S中删去实轴上的点以后得到一个集，记为T。所删去的直线上的点在T的边界中。然而，从某个弱的意义上看，这些点似乎是在T的"内部"。可是事实上它们并不在T的内部，因为它们甚至不属于T。不过，这些点倒是在$\bar{T}$的内部。

让我们考察一个性质很特殊的集。设V是R^2中一切点(x,y)的集，这里x和y都是有理数。于是V散布在整个平面上。R^2的每一个点都是V的一个聚点，因此$\bar{V}=R^2$。显然V的内部是空集，因为R^2的每一点也是V的余集的聚点。什么是V的边界呢？它就是整个R^2。

最后讨论实轴上的区间I：

$$I=\{(x,\ 0);x\in(a,\ b)\}$$

显然，$\bar{I}$是实轴上对应的闭区间：

$$\bar{I}=\{(x,\ 0);x\in[a,\ b]\}.$$

I（在R^2中）的内部是空集，因为I的每一点都在I的边界上。I的边界是$\bar{I}$。如果在R^1中讨论区间$(a,\ b)$，它的内部和边界和上述的内部和边界就大不相同。因此，在讨论集的闭包、边界和内部时，从本质上讲，不能把这些集孤立地作为几何对象来看，而应该记住它是相对于特定的空间来讨论的。

定义 设S是T的子集。如果T的每一个点都在S的闭包中，就称**S在T中稠密**。

稠密性和近似有关。S在T中稠密意味着T的每一个点可以用S中的点近似（按所希望的接近程度），亦即T的每一点是S中的点序列的极限。有理数集在R^1中稠密。更一般地，设$x=(x_1,\ \cdots,\ x_m)$是R^m中的点，其中每一个x_i是有理数，则这些点所成的集在R^m中稠密。每一个集在它的闭包中稠密。如果K是闭集，则子集S在K中稠密当且仅当$\bar{S}=K$。

例 19 我们再一次考虑（实或复的）$k\times k$矩阵空间。S是退

化阵的集，退化阵就是不可逆矩阵。因为S的余集是可逆矩阵的集，而可逆矩阵的集是一个开集（2.5节例14）所以，S是闭集。S的内部是空集。这是什么意思呢？就是说，如果A是退化矩阵，则A的每一个邻域包含有可逆矩阵。换句话说，如果A是退化阵，对A只要略加改变就可得到一个可逆矩阵。为什么？注意$A+CI$。对$k\times k$矩阵A，最多有k个数c使$A+cI$是退化阵，这是因为若$A+cI$是退化阵，则

$$\det(A+cI)=0,$$

并且$A+cI$的行列式是c的k次多项式。多项式的零点是A的**特征值**。由于A是退化阵，这些特征值中有一个是0。设非零特征值是$c_1, \cdots, c_r$。δ是$|c_1|, \cdots, |c_r|$中最小的，则对每一个c，$0<|c|<\delta$，$A+cI$是可逆的，特别对于一切小的正数ε，$A+\varepsilon I$是可逆的。于是，退化阵集的内部是空集。总而言之，$k\times k$可逆矩阵集是k^2维Euclid空间的稠密开子集。

习　题

1. 任一集S的内部是S余集的闭包的余集。
2. S的内部和R^m-S的内部的并是S边界的余集。
3. 找出R^m中边界为空集的一切子集。
4. 如果S和S°有同样的边界，则S°在$\bar{S}$中稠密。这论断是否正确？
5. 如果S和$\bar{S}$有相同的边界，则S是有界的。这论断是否正确？
6. 如果S°有界，S的边界也有界，则S是有界的。这论断是否正确？
7. 证明R^m中集S是开集当且仅当对一切$A\subset R^m$有

$$S\cap\bar{A}\subset\overline{S\cap A}.$$

8. 设S是R^m的线性子空间。证明，如果S的内部是非空的，则$S=R^m$。

9. 设f是实直线上的实值函数

$$R\xrightarrow{f}R.$$

证明f的图在R^2中的内部是空集。

10. 设G是R的一个加法子群，即G是实数的一个非空集，当$x\in G$和$y\in G$时有$(x-y)\in G$。证明下述两件事必有一件发生：G由某一固定实数的一切整数倍所组成或G在R中稠密。（提示：G中有最小正数吗？）

11. 设

$$p(x, y)=\sum_{k,n=0}^{N} a_{kn}x^k y^n$$

是两个变量的多项式，$p\neq 0$。设K是p的零点集：$K=\{(x, y); p(x, y)=0\}$。证明K的内部是空集，并把它推广到n个变量的情形。（因为矩阵的行列式是元素的多项式函数，所以例19是本题的特殊情况。）

12. 如果R^m中集S满足下述条件，集S称为是**凸集**：当x和y属于S时，则x和y之间的直线段也在S中。也就是说，如果x和y在S中，则对一切$0\leqslant t\leqslant 1$，$tx+(1-t)y$也在S中。证明

(a) 凸集的闭包是凸集。

(b) 凸集的内部是凸集。

(c) 设S是集，当x和y在S中时，$\frac{1}{2}(x+y)$也在S中，如果S是闭集，则S是凸集。

*13. 证明可对角线化的$k\times k$矩阵集是$k\times k$复矩阵空间的稠密子集。（提示：有k个不同特征值的矩阵是可对角线化的。）

*14. 用13题的结论证明Cayley-Hamilton定理：每一个$k\times k$矩阵满足它的特征方程。

2.7 紧 集

紧性是R^m中每一个闭的有界子集所特有的重要几何性质。紧性的概念与用开集覆盖一个集有关。

定义 设S是R^m的子集。S的一个**覆盖**是一族集$\{U_\alpha; \alpha\in A\}$，使得

$$S\subset\bigcup_{\alpha} U_\alpha.$$

S的一个覆盖叫做：

(a) S的**开覆盖**，如果每一个U_α都是开集；

(b) S 的**有限覆盖**,如果指标集 A 是有限的;

(c) S 的**可列覆盖**,如果指标集 A 是可列集。

我们主要讨论开覆盖。如果$\{U_\alpha\}$是S的一个覆盖,也可以说族$\{U_\alpha\}$覆盖了S。一个可列覆盖是一个集的序列。于是,S的可列开覆盖是开集的序列(U_n),在S中的每一点都至少含在一个集U_n中。

例 20 设S是R^m的任一子集,则S有很多不同的开覆盖。例如,集R^m是S的有限开覆盖。或者,令$\varepsilon>0$,设

$$U_x = B(x; \varepsilon),$$

则$\{U_x; x\in S\}$是S的开覆盖,此时S也是指标集。请注意这个特殊的覆盖$\{U_x; x\in S\}$,由于$\bar{S}$中的每一点都和S中的某个点之间的距离不超过ε,所以这个覆盖也是闭包$\bar{S}$的一个开覆盖。定义

$$V_x = B(x; |x|),$$

则当$0\notin S$时,$\{V_x; x\in S\}$是S的一个开覆盖。设

$$B_n = \{x; |x|<n\},$$

则$\{B_n\}$是S的可列开覆盖,这是因为它是R^m的可列开覆盖。

设$\{U_\alpha; \alpha\in A\}$是集$S$的一个覆盖,$B$是指标集$A$的一个子集。集族$\{U_\alpha, \alpha\in B\}$可以是$S$的覆盖,也可以不是$S$的覆盖,即

$$(2.25)\qquad S\subset\bigcup_{\alpha\in B}U_\alpha$$

可以成立也可以不成立。如果(2.25)成立,称$\{U_\alpha; \alpha\in B\}$是**从属于$\{U_\alpha; \alpha\in A\}$的覆盖**,简称$\{U_\alpha; \alpha\in B\}$是覆盖$\{U_\alpha; \alpha\in A\}$的**子覆盖**。下面将讨论子覆盖问题。在以下讨论中,读者应记住哪一类集被覆盖这件重要的事。

定义 如果集K的每一个开覆盖都有一个有限的子覆盖,就称K为**紧集**。

要使K是紧集,必有下列情况。如果我们给出覆盖K的任一

开集族$\{U_\alpha\}$，我们可以从这个开集族中取出有限个集 $U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_n}$ 来覆盖 K. 要证明给定的集K是紧集，对于K的大量不同的开覆盖，必须有一个方法去实现从K的任何一个开覆盖中取出有限覆盖。根据下述定理，我们可以得到非紧集的例子。

定理 10 每一个紧集是闭集，也是有界集。

证明 设K是紧集。我们首先证明K是有界的。K 的一个开覆盖是序列

$$B_n = B(0; n), \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

由于K是紧集，这些集的某一组有限个集就能覆盖 K。由于 $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$，因而它们中的一个就覆盖了 K。

怎样证明K是闭的呢？设 y 是不属于K的一点，$x \in K$，令

$$U_x = B(x; \frac{1}{2}|x-y|),$$

则$\{U_x; x \in K\}$是K的一个开覆盖. 因为K是紧集，K 中有$x_1, \cdots, x_n$，使得

$$K \subset \bigcup_1^n U_x,$$

设 r 是数 $\frac{1}{2}|y-x_k|$中的最小数，则$B(y; r)$是 y 的一个邻域，这个邻域不包含K的任何点。这样我们已经证明了，如果 y 不属于 K，那末 y 也不在K的闭包内。于是，集K是闭的。

例 21 有一类(无限)集，很容易看出它是紧集。设$\{x_n\}$ 是一个收敛序列，并且

$$x = \lim_n x_n$$

设 S 是序列的象和它的极限点 x 所成的集：

$$S = \{y; y = x \text{ 或 } y = x_n \text{ 对每一} n\},$$

则 S 是紧集. 证明如下. 设$\{U_\alpha\}$是 S 的任一开覆盖，则集 U_α 中必有一个包含 x，例如 $x \in U_{\alpha_1}$. 由于 x_n 收敛于 x，则集 U_{α_1} 包含

除了有限个 n 外的 x_n。选取 $U_{\alpha_2}, \cdots U_{\alpha_k}$，使得它们覆盖不在 U_{α_1} 中的 x_n，于是 $\{U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_k}\}$ 是有限子覆盖。

定理 11 设 S 是 R^m 的任一子集，则 S 的每一个开覆盖都有可列子覆盖。

证明 考虑 R^m 中具有有理坐标的一切点所成的集。这是一个可列集。设点 p 具有有理坐标，以点 p 为中心，以有理数为半径作开球，当 p 取一切有理数时，这些开球所成的集是一个可列集。为什么？根据刚才的叙述，它是可列集的可列并(见附录)。于是有一个开球的序列 $B_1, B_2, B_3, \cdots$，其中每一个集 B_n 都是具有有理中心和有理半径的开球。

现在，设 $\{U_\alpha; \alpha\in A\}$ 是集 S 的一个开覆盖。对每一正整数 n，要问球 B_n 是否包含在一个集 U_α 内。如果这件事成立，就可以选取一个指标 α_n，使得

(2.26) $$B_n\subset U_{\alpha_n}.$$

这表明集 U_{α_n} 的序列覆盖了 S。(注意，并不是对每一个 n，α_n 总有定义，对那些使 α_n 没有定义的 n，不妨任意指定一个 α 值即可。)设 $x\in S$。存在一个 α，使 $x\in U_\alpha$。选择一个开球 $B(x;r)\subset U_\alpha$。设 p 是有有理坐标的一点，使得

$$|p-x|<\frac{1}{2}r,$$

选择有理数 t，使得

(2.27) $$|p-x|<t<\frac{1}{2}r.$$

从(2.27)得到

$$x\in B(p;t)\subset B(x;r).$$

必有某一 n，使 $B(p;t)=B_n$，因此 B_n 包含 x 并且在集 U_α 中。因为 B_n 包含在某一个 U_α 中，把包含 B_n 的集记为 U_{α_n}，就有(2.26)。因此

$$x\in U_{\alpha_n}.$$

S 的每一点在集 U_{α_n} 中。

定理 11 的意义是很明白的，如果想证明一个集是紧集，只需要证明它是"可列紧集"即可。也就是只要证它的每一个可列开覆盖必定存在有限子覆盖。我们将用它来证明R^m中任一闭的有界子集是紧集。先让我们暂时撇开用闭集来描述紧性。

定理 12 设K是一个紧集。$\{K_\alpha;\alpha\in A\}$是K的闭子集族，并且对任一组有限个指标$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，交集$K_{\alpha_1}\cap\cdots\cap K_{\alpha_n}$非空，则交集

$$\bigcap_{\alpha\in A}K_\alpha$$

非空。

证明 设$\{K_\alpha\}$是K的任一闭子集族。对每一个指标α，设U_α是K_α的(开)余集。假如交集

$$\bigcap_\alpha K_\alpha$$

是空的，这意味着它的余集

$$\bigcup_\alpha U_\alpha$$

包含K，也就是$\{U_\alpha\}$是K的一个开覆盖。由于K是紧的，存在指标$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，使得

$$K\subset\bigcup_{j=1}^{n}U_{\alpha_j},$$

于是

$$\bigcap_{j=1}^{n}K_{\alpha_j}$$

是空的。因此，要使上面这一现象不发生，一切闭集K_α的交集必须是非空的。

紧集原来是用开集来描述的，定理 12 只不过利用开集的余集来重新刻划紧集的性质。由于在分析中，通过闭集来理解紧性很重

要，因此才把它叫做定理。利用紧性，我们肯定了"在一切 K_n 中存在一公共点"。这些论证我们还将用来证明以下关于紧性的一个最重要的定理。

定理 13 (Heine-Borel)　在 R^m 中，任一闭有界集是紧集。

证明　把定理 11 和 Bolzano-Weierstrass 定理合起来就可得证。设 K 是闭的有界集。定理 11 指出，要证明 K 是紧的，只要证明可列开覆盖 $\{U_n\}$ 存在有限子覆盖就够了。我们给出这样一个覆盖，令

$$K_n=\{x\in K;x\notin U_k,\quad 1\leqslant k\leqslant n\}.$$

集 K_n 是前一个套着后一个：

$$K_1\supset K_2\supset K_3\supset\cdots$$

由于 K 是闭的，因而每一个 K_n 是闭的。由于 K 是有界的，所以每一个 K_n (特别 K_1)是有界的。如果每一个 K_n 非空，Bolzano-Weierstrass(定理 9)指出一切 K_n 的交集是非空的，但是，这样的序列 $\{U_n\}$ 就不能覆盖 K。因此，必有某一个 K_n 是空的。如果 K_N 是空的，则 U_1，…，U_N 覆盖了 K。

习　题

1. 下面哪一个复数集是紧的?

(a)　满足 $|z|\geqslant 1$ 的一切 z;

(b)　满足 $zz^*=2$ 的一切 z;

(c)　满足 $|z|$ 是有理数且 $|z|\leqslant 1$ 的一切 z;

(d)　满足 $e^z=1$ 的一切 z。

2. 至少要多少个长度为 ε 的开区间才能够覆盖区间 $[0, 1]$?

3. 下述结论是否正确?设 K 是复数集，K 在实轴和虚轴上的两个正交投影集都是紧的，则 K 是紧的。

4. 下述结论是否正确?设 S 是有界集，则存在包含 S 的最小紧集。

5. R^m 中任一有界子集可以被有限个半径为 ε 的开球所覆盖。

6. 下述结论正确吗?设 A 是闭集，而 B 是有界集，则 $A\cap B$ 是紧集。

7. 设 A 和 B 是紧集，则 Cartesian 积 $A\times B$ 是紧集。

8. 下述结论是否正确?设集S有最大紧子集,则S是紧集。

9. 下述结论是否正确?设S的边界是紧集,S的内部是紧集,则S是紧集。

10. 举出一个可列紧集,它有可列无限的聚点集。

11. 如果一个紧集仅有可列个聚点,则它是一个可列集。

12. 下面 $k\times k$ (实)矩阵集中,哪些是紧集?

(a) 满足 $A=A^t$ 的一切A;

(b) 一切正交阵 A;

(c) 满足 $A^2=0$ 的一切 A;

(d) 满足 $A^2=A$ 的一切 A。

13. 设$\{I_n\}$是覆盖$[0, 1]$的一个开区间序列,则

$$\sum_n I_n \text{ 的长度}>1.$$

14. 设A和B是 R^m 的子集,定义

$$A+B=\{x+y;x\in A \text{ 和 } y\in B\}.$$

(a) 设A是任意集,B是开集,则 $A+B$ 是开的。

(b) 设A是闭的,B是紧集,则 $A+B$ 是闭的。

(c) 请给出一个例子:集A和集B都是闭集,而$A+B$不是闭集。

2.8 相对拓扑

在许多场合,我们只是在 R^m 的子集上讨论,而不是在整个Euclid 空间上讨论。例如,我们只想讨论定义在实轴的一个区间$[a, b]$上的函数。这时,区间暂时成为一个小整体,我们在它当中讨论点之间的靠近,收敛,开集和闭集,等等。我们可以忽略 R^m 的其余部分来定义"子空间"的概念。

在 R^m 中取定一个集 S。设 x 是S的一点,**x 相对于S的邻域**是一个集 T,它满足

(i) $T\subset S$;

(ii) 对某一 $r>0$, T 包含 $B(x;r)\cap S$。

换句话说,x 相对于S的邻域是S的一个子集,该子集包含S

中充分接近 x 的每一点。

设 V 是 S 的一个子集。如果 V 是它每一个点的相对邻域，就称 V 是**相对于 S 的开集**。于是，如果 U 是 R^m 中一个开集

$$V=S\cap U,$$

则 V 相对于 S 是开集。

设 F 是 S 的子集，如果 F 的聚点属于 S，则该聚点也属于 F，就称 F 是**相对于 S 的闭集**。显然，当集 $F\subset S$ 时，下列条件是等价的：

(i) F 是相对于 S 的闭集。

(ii) $F=S\cap K$，其中 K 是 R^m 中闭集。

(iii) 设 $\{x_n\}$ 是 F 中的一个序列，该序列收敛于集 S 的点 x，则 x 在 F 中。

(iV) F 相对于 S 的余集 $S-F$ 是相对于 S 的开集。

这里有几个说明。相对于 S 的开集族在任意并以及有限交的运算下仍为相对于 S 的开集。一族相对于 S 的闭集有互补的性质：在任意交和有限并下仍为相对于 S 的闭集。因而集 S 相对于 S 是又开又闭的。设 $\{x_n\}$ 是 S 中的序列，则 $\{x_n\}$ 收敛于点 $x\in S$ 当且仅当 x 相对于 S 的每一邻域包含除有限个 n 外的 x_n。

也可以定义相对于 S 的内部，相对于 S 的闭包，等等。我们不再多讲了，只讲一个。如果一个集由相对开集组成的每一个覆盖都存在有限子覆盖，则该集称为**相对于 S 的紧集**。设 K 是 S 的子集，则 K 是相对于 S 的紧集当且仅当 K 是紧集。验证这点很容易，但它告诉我们一些事情。笼统地说，它指出紧性是(紧的)几何对象的内在性质。

例 22 当集 S 不是开集就是闭集时，我们常常要用到相对开集等概念。设 S 是 R^m 中一个开集，则"相对于 S 的开集"只不过是"包含在 S 中的开集"。"相对于 S 的闭集"更有趣，例如，设 $a<$

$c<b$，则区间$(a, c]$是相对于区间(a, b)的闭集。

设S是R^m中闭子集，则"相对于S的闭集"成为"S的闭子集"，然而，"相对于S的开集"更有趣。区间$\left(\frac{1}{2}, 1\right]$是相对于区间$[0, 1]$的开集。设集$S$是由数0和1组成的集，$S=\{0, 1\}$，则集$\{0\}$是相对于$S$的开集。

例 23 设S是R^m的线性子空间。令$k=\dim(S)$，则S是R^m的闭子集。S本质上可看作R^k。可以把R^m中的每一个x分解成和

$$x=y+z,$$

其中y在S中，z正交于S（正交于S中每一向量）。向量y是x在S上的正交投影：

$$R^m \xrightarrow{P} S,$$

$$y=P(x).$$

容易看出，设$V\subset S$，V是相对于S的开集（闭集）当且仅当

$$P^{-1}(V)=\{x; P(x)\in V\}$$

是R^m中的开集（闭集）。在图8中作了说明。

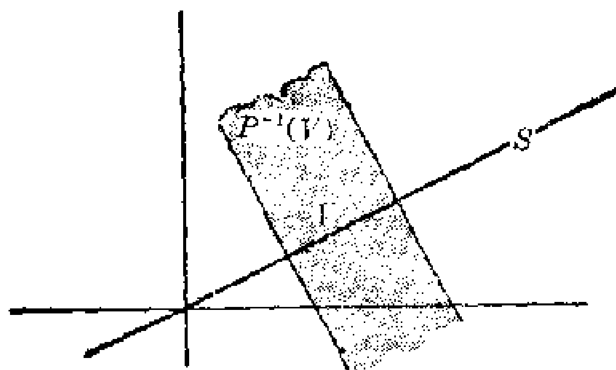


图 8

通过相对开集（或相对闭集）可以方便地定义连通性这一几何性质。设S是R^m的子集。我们要说明S是连通的意味着什么？在图9中，我们大概会认为集S是不连通的，而右边的那个集F是

连通的．设集G是从图9右边的集F中去掉它的中点，它是一个不连通集吗？也许是的，因为它很自然地被分成二块．但是如果我们把F也分成二块，一块是左面的一半，另一块是右面的一半加上中点，这样做和刚才所做的有什么不同呢？下面我们将给出它们的区别．

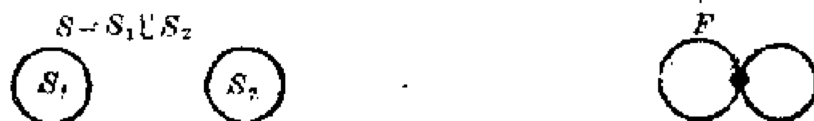


图 9

定义 如果在集S中存在二个子集S_1和S_2，具有下述性质，就称S是**不连通**的：

(i) S_1和S_2都不是空集；$S_1\cap S_2=\varnothing$；

(ii) $S=S_1\cup S_2$；

(iii) S_1和S_2相对于S是闭集．

如果S不是不连通的，则S就是**连通**的．

对集S来说，下述条件是等价的：

(i) S是连通的．

(ii) 设$S=U_1\cup U_2$，其中U_1和U_2是不相交的相对于S的开子集，则U_1或U_2中必有一个是空集．

(iii) 设T是S的子集，T相对于S是又开又闭的，则或者$T=S$或者T是空集，这两件事中必有一件发生．

特别地，R^m中一个开集S是不连通的当且仅当$S=U_1\cup U_2$，其中U_1，U_2是R^m中不相交的非空开集．类似地，闭集S是不连通的当且仅当$S=K_1\cup K_2$，其中K_1，K_2是R^m中不相交的非空闭集．对于既不是开集又不是闭集的集，我们不打算讨论它们的连通性了．证明以下定理有助于我们对这一概念的理解．

定理 14 设S是R^m的子集，S是不连通的，则存在R^m中的

开集 U_1, U_2，使得

(a) $S\subset U_1\cup U_2$;

(b) $S\cap U_1\neq\emptyset\neq S\cap U_2$;

(c) U_1 和 U_2 是不相交的。

证明 S 是不连通的事实也可这样描述，设 U_1, U_2 是开集，它满足(a)，(b)，并且

(c′) $S\cap U_1\cap U_2$ 是空的。

但是 U_1 和 U_2 可以在 S 以外的点相交。我们必须证明可以把 U_1 和 U_2 缩小一些，使新的开集是不相交的，而(a) 和 (b)仍成立，这种缩小并不改变 $U_1\cap S$ 和 $U_2\cap S$，这样，余下的证明对 S 就没多少事可做了。

令

$$T_1=U_1-U_2,$$
$$T_2=U_2-U_1.$$

若 $x\in T_1$，则 $x\in U_1$，并且有正数 $r_1(x)$，使得

$$B(x;r_1(x))\subset U_1.$$

同样地，若 $y\in U_2$，则 $y\in U_2$，并存在某一 $r_2(y)>0$，使

$$B(y;r_2(y))\subset U_2.$$

令

$$V_1=\bigcup_{x\in T_1}B\left(x;\ \frac{1}{2}r_1(x)\right),$$

$$V_2=\bigcup_{y\in T_2}B\left(y;\ \frac{1}{2}r_2(y)\right).$$

则 V_i 是包含 T_i 的开集(因此，$V_i\cap S=U_i\cap S$)。进一步可证，V_1 和 V_2 是不相交的。如果

$$z\in V_1\cap V_2,$$

则对某一 $x\in T_1$ 和 $y\in T_2$

$$|z-x|<\frac{1}{2}r_1(x),$$

$$|z-y|<\frac{1}{2}r_2(y).$$

数 $r_1(x)$，$r_2(y)$ 总有一个较大，例如 $r_1(x)\geqslant r_2(y)$，则

$$\begin{aligned}|x-y|&\leqslant|z-x|+|y-z|\\&<\frac{1}{2}r_1(x)+\frac{1}{2}r_2(y)\\&\leqslant r_1(x).\end{aligned}$$

但是这表示 y 在 U_1 中，然而 $y\in(U_2-U_1)$。所以 V_1 和 V_2 是不相交的。

系 设 K_1 和 K_2 是 R^m 中不相交闭集，则存在开集 V_1，V_2 使得 $K_j\subset V_j$ 且 V_1 和 V_2 是不相交的。

证明 在上面的论证中，取 $S=K_1\cup K_2$，V_1 是 K_2 的余集，V_2 是 K_1 的余集就可得证。

习　题

1. 整数集的任一子集是相对开集(也是相对闭集)。

2. R 中每一区间是连通的。

3. 设 S 是 R 中的连通子集，则 S 必是下述三种集的一种：空集，只有一个点的集，一个区间。

4. R^m 的任一线性子空间是连通的。

5. 设 K 是一个无限紧集，则 K 有一个子集，它不是相对于 K 的闭集。

6. 设 S 是有界连通开集，证明：S 中的任意两点必定可以用在 S 内的一条折线相连接。也就是说，设 $A\in S$，$B\in S$，存在点 $A=x_0, x_1, \cdots, x_n=B$，使对每一个 k，从 x_{k-1} 到 x_k 的线段位于 S 内。(提示：固定 A，考虑能如此和 A 相连的 B 点的集合，证明这集是相对于 S 又开又闭的集。)

7. 任一凸集是连通的。(如果一个集包含连接集中任意两点的线段，这种集就称为凸集。)

8. 设 S 是连通集，并且 $S\subset T\subset\bar{S}$，则 T 是连通的。特别，连通集的闭包是连通的。

9. 连通集的内部是连通的，这命题正确吗？

10. 连通紧集的边界是连通集，这结论正确吗？

11. 设K是Cantor集（例15）。证明在K中不存在包含有多于一个点的连通子集。

12. 从R^m中去掉一个超平面（线性泛函的等值面），剩下的集是不连通的。

13. 从C^m中去掉一个超平面（复线性泛函的等值面），剩下来的集是连通的。

14. $k\times k$实可逆矩阵集不是$R^{k\times k}$的连通子集。

15. $k\times k$复可逆矩阵集是$C^{k\times k}$的连通子集。

16. $R^m(m\geqslant 2)$中的球面是连通的。

17. 考虑两个实变量的多项式$p(x, y)$，$p\neq 0$。设$K=\{(x, y);\ p(x, y)=0\}$。

(a) 给出一个例子，使K为空集。

(b) 给出一个例子，使K只有一点。

(c) 给出一个例子，使K不是紧集。

(d) 设K包含多于一点，K的余集可以是连通集吗？

18. 设S是R^m的子集，$x\in S$，令S_x是S中包含x的一切连通子集的并集。则S_x非空，而且是连通的。如果S_x和S_y有公共点，则$S_x=S_y$。集S_x叫做S的**连通分支**。

*19. 设K是紧集，$x\in K$，则K的含有x的连通分支是一切含有x的相对开-闭集（即又开又闭的集）的交。

第3章 连 续 性

3.1 连续函数

数学中到处会遇到连续性的概念。可以很一般地讨论连续性，而我们将先从一个 Euclid 空间到另一个空间的连续映射谈起。读者可以参考附录，复习有关函数的基本概念和术语。

考虑函数 F

$$D \xrightarrow{F} R^m, \quad D \subset R^k, \tag{3.1}$$

它定义在 R^k 的子集上，并把此子集映射到 R^m 中。粗糙地说，所谓 F 是连续的，就意味着 F 保持邻近性：如果 x_1 靠近 x_2，则 $F(x_1)$ 也靠近 $F(x_2)$。要把这一说法精确化有种种方法，我们将介绍几种方法，并证明它们是等价的。从这些方法中，我们选择一种作为定义。为了今后便于推广，我们将采用开集来描述连续性。

定义 设函数 F 由 (3.1) 所定义，如果对 R^m 中每一个开集 V，逆象 $F^{-1}(V)$ 是相对于定义域 D 的开集，则称函数 F 是**连续**的。

连续函数是把互相接近的点映射成仍然互相接近的点吗？从某种意义上说，确是如此。下面说明理由。设 F 是连续函数，x_0 是区域 D 中的一点。看一下靠近象点 $F(x_0)$ 的一切点所成的集，也就是 $F(x_0)$ 的一个邻域。这是一个"小""邻域"，例如可以看作一个开球

$$B_\varepsilon = B(F(x_0); \varepsilon).$$

可以断言，D 中充分靠近 x_0 的每一点都被 F 映射到邻域 B_ε 中。为

什么呢？由于连续性定义指出

$$F^{-1}(B_\varepsilon)=\{x\in D;F(x)\in B_\varepsilon\},$$

是相对于D的开集。因此，这个集包含D和关于x_0的某一个开球的交：

$$D\cap B(x_0;\delta)\subset F^{-1}(B_\varepsilon)。\tag{3.2}$$

换句话说，(3.2)说明

$$|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon,\ x\in D,\ |x-x_0|<\delta。$$

连续性指出，若x_0是给定的一点，$x_0\in D$，且对任意$\varepsilon>0$，存在某一数$\delta>0$，使得和x_0距离小于δ的区域D内的任一点被F映射成与$F(x_0)$的距离小于ε的点。我们将立即叙述连续函数的这一条性质。

注意，我们先讨论F在单点x_0附近的性态。

定义 设函数F满足以下条件：如果V是R^m中$F(x_0)$的一个邻域，则逆象$F^{-1}(V)$是x_0相对于D的一个邻域，这时称F在点x_0连续。

容易看出，F是连续的当且仅当F在它的定义域D的每一点连续。让我们用ε，δ来说明它，并作一点补充。

定理 1 设x_0是函数F的定义域D中的一点。下述条件是等价的：

(i) F在点x_0连续。

(ii) 对任一$\varepsilon>0$，必定存在数$\delta>0$，使对于每一$x\in D$，当$|x-x_0|<\delta$时有

$$|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon。$$

(iii) 设$\{x_n\}$是D中收敛于x_0的序列，则序列$\{F(x_n)\}$收敛于$F(x_0)$。

证明 注意到(i)易导出(ii)，我们设(ii)成立，来验证(iii)。设$x_n\in D$，并且$x_0=\lim_n x_n$。考虑一个开球$B(F(x_0)\ \varepsilon;)$。从(ii)可

得到 $\delta>0$，使得

(3.3) $$|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon,\ x\in D,\ |x-x_0|<\delta.$$

因为 x_n 收敛于 x_0，因此除了有限个 n 外，有 $|x_n-x_0|<\delta$，于是，除了有限个 n 外，应有

$$|F(x_n)-F(x_0)|<\varepsilon.$$

因为上式对任一 $\varepsilon>0$ 正确，所以序列 $\{F(x_n)\}$ 收敛于 $F(x_0)$。

现在，设条件(iii)满足，来验证(i)。设 V 是 $F(x_0)$ 的一个邻域。$F^{-1}(V)$ 是否为 x_0 相对于 D 的一个邻域呢？如果不是，则对每一个 n，可找到 $x_n\in D$，$|x_0-x_n|<\frac{1}{n}$，但是 $x_n\notin F^{-1}(V)$。于是 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0。根据(iii)，$\{F(x_n)\}$ 收敛于 $F(x_0)$。从而，由于 V 是 $F(x_0)$ 的一个邻域，故有某一个 $F(x_n)$ 在 V 中，但 $x_n\notin F^{-1}(V)$，这是矛盾的。因而结论是 $F^{-1}(V)$ 必须是 x_0 相对于 D 的一个邻域。

(i) ⟶ (ii) ⟶ (iii) ⟶ (i) 由于我们证好了

显然，设 F 具有三个性质之一，也一定具有其它的两个性质。为了成功地处理连续性，我们必须迅速掌握两件事：

1. 一些基本的连续函数；

2. 由连续函数复合产生新的连续函数的方法。为了加深对连续性的理解，我们也要举出一些不连续函数。在举例以前，先介绍一个基本的有关复合函数连续性的定理。

定理 2 设 F 是从 R^k（的一个子集）到 R^m 中的函数，G 是从 R^m（的一子集）到 R^n 中的一个函数，并且 G 的定义域包含 F 的象。设 F 在点 x_0 连续，G 在点 $F(x_0)$ 连续，则复合 $G\circ F$ 在 x_0 连续。

证明 定理的叙述和它的证明一样长。令 W 是 $(G\circ F)(x_0)=G(F(x_0))$ 的一个邻域(图 10)，G 的定义域是 D_G，则 $G^{-1}(W)$ 是

$F(x_0)$相对于 D_G 的一个邻域。于是，$G^{-1}(W)=V\cap D_G$，其中V是 R^m 中 $F(x_0)$的一个邻域。因为D_G 包含F，的象，$F^{-1}(V\cap D_G)=F^{-1}(V)$；因此，$F^{-1}(G^{-1}(W))$ 是 x_0 相对于 D_F 的一个邻域。但是 $F^{-1}(G^{-1}(W))=(G\circ F)^{-1}(W)$，于是定理得证（见图 10）。

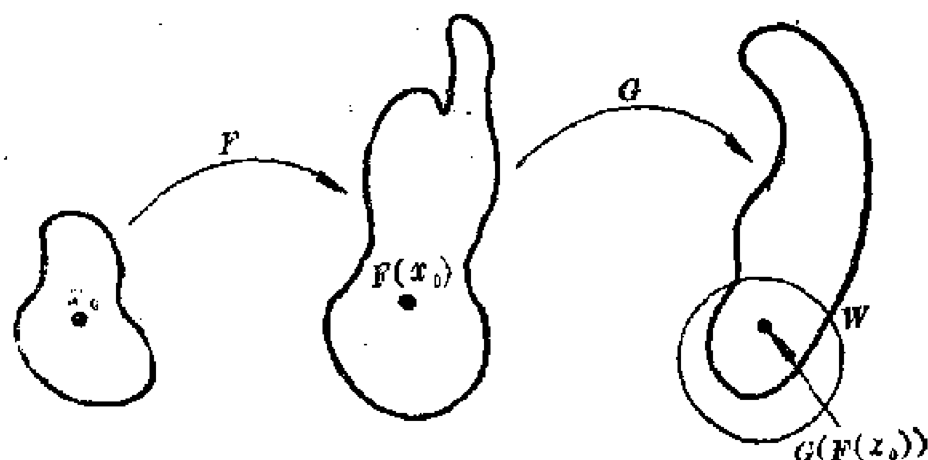


图 10

读者可以利用定理1中连续性的其它说法来证明定理 2。例如，设$\{x_n\}$是F的定义域中点的序列，该点列收敛于 $x_0\in D_F$。因为F是连续的，因此$\{F(x_n)\}$收敛于 $F(x_0)$。相应地，由于G是连续的，$G(F(x_n))$ 收敛于 $G(F(x_0))$。

函数

$$D\xrightarrow{F}R^m$$

可看作m维实值函数：

$$F=(f_1,\ \cdots,\ f_m)$$

$$y=F(x)$$

$$y_1=f_1(x_1,\ \cdots,\ x_k),$$

$$\vdots\qquad\vdots$$

$$y_m=f_m(x_1,\ \cdots,\ x_k),$$

函数 f_j 是F在 R^m 上的第 j 个标准坐标函数，也就是$f_j(x)$是点

$F(x)$的第 j 个坐标。函数 $F=(f_1, \cdots, f_m)$是连续的充要条件是每一个 f_j 是连续的。我们把它的证明留作习题。

例 1 向量加法是一个连续函数。当然，在 R^m 上的向量加法不是 R^m 上的函数，而是在 R^{2m} 上的函数。R^{2m} 看作 $R^m\times R^m$，它的每一个元素是 (x, y)，其中 x 是前 m 个坐标，而 y 是后 m 个坐标：

$$(x, y)=(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m).$$

加法是函数

$$R^{2m}\xrightarrow{A}R^m,$$

$$A(x, y)=x+y.$$

在2.1节的引理中，已验证了序列形式的连续性。设 δ 是这样的数，使得以 (x, y) 为中心，以 δ 为半径的球包含在 $B(x+y; \varepsilon)$ 的逆象中。请读者考虑，最大的 δ 是什么？

现在，容易看到，两个连续函数的和是连续的。设

$$D\xrightarrow{F}R^m,$$

$$D\xrightarrow{G}R^m,\ D\subset R^k,$$

则 $(F+G)(x)=F(x)+G(x)$。与证明加法是连续的相仿，可证 $F+G$ 是连续的。事实上，$F+G$ 的连续性可以由加法的连续性导出如下。设 $F\times G$ 是函数

$$D\xrightarrow{F\times G}R^{2m},$$

$$(F\times G)(x)=(F(x), G(x)).$$

若 F, G 是连续的，显然 $F\times G$ 也连续，则 $F+G=A\circ(F\times G)$，其中 A 是加法，由定理 2，$F+G$ 是连续的。

例 2 矩阵乘法是连续的。$k\times k$ 实矩阵的乘法是 $2k^2$ 维Euclid 空间到 k^2 维 Euclid 空间中的一个函数：

$$R^{2(k\times k)}\xrightarrow{M}R^{k\times k},$$

$$M(A, B) = AB.$$

在第二章例 2 中，已验证了序列形式的连续性。类似地，两个连续的矩阵值函数的积是连续的。矩阵也可以是复的。特别，两个连续实值(复值)函数的积是连续的。

例 3 R^n 上每一个多项式函数是连续的。这种函数的形式为

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k_1, \cdots, k_n = 0}^{N} a_{k_1, \cdots, k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \tag{3.4}$$

式中 $a_{k_1, \cdots, k_n}$ 都是给定的实数。标准坐标函数

$$f_j(x) = x_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

是连续的：

$$|f_j(x) - f_j(x_0)| \leqslant |x - x_0|.$$

当然，常数函数是连续的。反复应用连续函数的和、积是连续的事实，就得到了每一个多项式函数是连续的。

例 4 根据同样的理由，C^n 上的每一个多项式函数

$$f(z_1, \cdots, z_n) = \sum a_{k_1, \cdots, k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n} \tag{3.5}$$

是连续的。

例 5 可逆矩阵集上的反演是连续的。必要时，可参考第二章例 14。设 A 是确定的 $k \times k$ 可逆矩阵，若 $|A - B| < |A^{-1}|^{-1}$，则 $|I - A^{-1}B| < 1$，于是

$$B^{-1}A = [I - (I - A^{-1}B)]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - A^{-1}B)^n,$$

$$B^{-1} - A^{-1} = \sum_{1}^{\infty} (I - A^{-1}B)^n A^{-1},$$

$$|B^{-1} - A^{-1}| \leqslant |A^{-1}| \cdot \sum_{1}^{\infty} |I - A^{-1}B|^n.$$

现在

$$|I - A^{-1}B| \leqslant |A^{-1}| \, |A - B|,$$

所以

$$|B^{-1}-A^{-1}|\leqslant|A^{-1}|\sum_{1}^{\infty}|A^{-1}|^n|A-B|^n,$$

于是

$$(3.6)\qquad |B^{-1}-A^{-1}|\leqslant|A^{-1}|\cdot\frac{|A^{-1}||A-B|}{1-|A^{-1}||A-B|}.$$

显然，若 $|A-B|$ 是小的量，那末 $|B^{-1}-A^{-1}|$ 也是小的量。

如果读者从(3.6)还看不清楚连续性，可再写几步。给定一可逆矩阵 A 和数 $\varepsilon>0$，希望找到 $\delta>0$，使对一切矩阵 B，$|B-A|<\delta$ 时，有 $|B^{-1}-A^{-1}|<\varepsilon$。根据刚才导出的不等式，若令

$$\delta<|A^{-1}|^{-1},$$

$$|A^{-1}|\cdot\frac{|A^{-1}|\delta}{1-|A^{-1}|\delta}\leqslant\varepsilon,$$

具有这些性质的最大 δ，使第二个条件中的等号成立：

$$\delta=\frac{1}{|A^{-1}|}\cdot\frac{\varepsilon}{\varepsilon+|A^{-1}|}.$$

反演的连续性有一个特殊情况：设 f 是实值函数或复值函数，且 f 在 x 连续，$f(x)\neq0$，则 $1/f$ 在 x 也连续。于是有理函数（多项式的商）除去它们分母的零点集外是连续的。

如果知道了在非零数(1×1 矩阵) 上的反演是连续的，就可得到有理函数在它有定义的地方是连续的，由此可得到矩阵的反演是连续的：设 $A(j|i)$ 是 $(k-1)\times(k-1)$ 矩阵，它是从 A 中去掉第 j 行和第 i 列以后得到的。A^{-1} 的元是 A 的元的有理函数，因为 A^{-1} 的第 i, j 元是

$$(-1)^{i+j}\frac{\det A(j|i)}{\det A}.$$

但是，在非零数集上的反演是连续的，这一证明并不比我们对矩阵所作的论证更简单。

例 6 设 D 是非负实数集，n 是一正整数。n 次根式函数

$$f(x)=x^{1/n}$$

是连续的。固定正数 t，要证明若 $x-t$ 是小的数，则 $x^{1/n}-t^{1/n}$ 也是小的数。为了比较这两个数的大小，令 $a=t^{1/n}$ 和 $b=x^{1/n}$，并把 b^n-a^n 和 $b-a$ 作比较。现在

$$b^n-a^n=(b-a)(b^{n-1}+b^{n-2}a+\cdots+a^{n-1}).$$

于是，

$$|b^n-a^n|\geqslant|b-a|nc^{n-1},$$

其中 c 是 a 和 b 中的较小的一个。取 x 充分靠近 t，并且 $x>t/2$，则有

$$|x-t|\geqslant|x^{1/n}-t^{1/n}|\cdot n\left(\frac{t}{2}\right)^{(n-1)/n},$$

或

$$|x^{1/n}-t^{1/n}|\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{2}{t}\right)^{(n-1)/n}|x-t|,\ x>\frac{t}{2}.$$

由此不等式可得到 $f(x)=x^{1/n}$ 在 $x=t$ 是连续的。

例 7 从 R^k 到 R^m 中的任一线性变换是连续的。线性变换是函数：

$$R^k\xrightarrow{T}R^m$$

使得 $T(cx_1+x_2)=cT(x_1)+T(x_2)$。定义中的性质可推广到线性组合的情况：

$$T(c_1x_1+\cdots+c_nx_n)=c_1T(x_1)+\cdots+c_nT(x_n). \tag{3.7}$$

也可以直接描述它们。设 $e_1, \cdots, e_k$ 是标准基向量：

$$\begin{aligned}e_1&=(1,0,\cdots,0),\\e_2&=(0,1,\cdots,0),\\&\ \vdots\qquad\vdots\\e_k&=(0,0,\cdots,1),\end{aligned}$$

则 $x=x_1e_1+\cdots+x_ke_k$。所以，如果 T 是线性的，就有

$$T(x)=x_1T(e_1)+\cdots+x_kT(e_k).$$

怎样描述从 R^k 到 R^m 中的一切线性变换呢？在 R^m 中任取 k 个

向量 $y_1, \cdots, y_k$, 并定义

$$T(x)=x_1y_1+\cdots+x_ky_k,$$

则 T 是线性的，并且 $y_j=T(e_j)$。进一步的讨论可得出，每个线性变换都具有这一形式。

从线性变换的这一特殊形式可知，它的连续性是显然的。设 $y_j=T(e_j)$，则

$$|T(x)|\leqslant|x_1||y_1|+\cdots+|x_k||y_k|.$$

根据 Cauchy 不等式

$$|T(x)|\leqslant M|x|,$$

其中

$$M=(|y_1|^2+\cdots+|y_k|^2)^{1/2}.$$

由于 T 是线性的，

$$|T(x)-T(x_0)|=|T(x-x_0)|\leqslant M|x-x_0|.$$

习　题

1. $f(x)=x^2$ 是从 R 到 R 中的连续函数。对给定的 t 和 ε，找出最大的 δ 的表示式，使得

$$|f(x)-f(t)|<\varepsilon, \quad |x-t|<\delta.$$

2. 设 g 是最大取整函数。也就是当 $x\in R$ 时，$g(x)$ 是小于等于 x 的最大整数。g 的连续点是哪一些？

3. 设 f 是 R^2 上的实值函数

$$f(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2\neq 0, \quad f(0, 0)=0.$$

证明 f 在原点不连续。在 R^2 中哪些线上 f 是连续的？

4. 设 f 是习题 3 中的函数，V 是开集，$V\subset R$，并且 $f^{-1}(V)$ 是 R^2 中开集。把这样的开集 V 都列举出来。

5. 设

$$R^k\xrightarrow{f}R$$

是连续函数，且 f 只取有理值，证明 f 是常数。

6. 设 f 是 R^k 上实值函数

$$f(x)=\max_i x_i,$$

也就是$f(x)$是 x 的最大坐标。f 连续吗？

7. 证明 R^k 上的长度是连续函数。

8. 设F是连续的，则 $|F|$ 也连续。

9. 设 f 和 g 是D上的实值连续函数，则 f 和 g 的最小值

$$h(x)=\min\{f(x),\ g(x)\}$$

是连续的。

10. 复数域上的共轭是连续的。

11. 函数

$$D\xrightarrow{f}R$$

是连续的充要条件是(对任一 $t\in R$)集$\{x;\ f(x)>t\}$ 和 $\{x;\ f(x)<t\}$ 是相对于D的开集。

12. 函数 f

$$f(z)=\frac{1+z}{1-z}$$

在复数 $z\neq1$ 的集上是连续的。

(a) 设 $f(0)=1$，满足

$$|1-f(z)|<\frac{1}{2},\quad |z|<\delta,$$

的最大 δ 是什么？

(b) 设 $V=\{z\in C;\ \mathrm{Re}(z)>0\}$，$f^{-1}(V)$是什么？

13 设D是实直线上的一个区间。如果对一切 x, $y\in D$ 和一切 $t\in[0,1]$，在D上的实值函数f满足

$$f(tx+(1-t)y)\leqslant tf(x)+(1-t)f(y),$$

则称 f 是D上的**凸函数**。

(a) 用线段和 f 的图形来阐明 f 的凸性。

(b) 给出一个不连续凸函数的例子。

(c) 证明在开区间上的任一凸函数是连续的。

14 设D是 R^k 的凸集，也就是只要 x 和 y 在D中，则从 x 到 y 的线段也在D中。

(a) 定义D上的凸函数。

(b) 证明：如果D是开的，则在D上的每一凸函数是连续的。

15 设T是从R^k到R^m中的函数，它是可加的：$T(x_1+x_2)=T(x_1)+T(x_2)$。如果T是连续的，证明T是线性变换。

3.2 连续性和闭集

对连续函数和闭集间的关系应作特别的说明。本节将介绍一些例题和作一些注解；虽然很初步，但却可以帮助我们加深对连续性的理解。

设有一函数

$$D\xrightarrow{F}R^m,\quad D\subset R^k.$$

若V_1和V_2是R^m的子集，则

$$F^{-1}(V_1\cup V_2)=F^{-1}(V_1)\cup F^{-1}(V_2),$$

$$F^{-1}(V_1\cap V_2)=F^{-1}(V_1)\cap F^{-1}(V_2).$$

逆象的这两个性质的证明虽很简单，但却很基本。注意不要把第二个性质和$F(U_1\cap U_2)=F(U_1)\cap F(U_2)$相混淆；一般说来，后一算式是不正确的。从以上两条性质容易得到：F是连续的当且仅当对R^m中任一闭集K，$F^{-1}(K)$是相对于D的闭集。特别，若F是连续的，而K是R^m中由一点y_0所成的集，则$F^{-1}(K)=\{x\in D;F(x)=y_0\}$是相对于$D$的闭集，也就是说，一个连续函数的任一等值面是闭的（相对于函数的定义域）。

设f是R^k上的实值连续函数，则$\{x;f(x)\geqslant 0\}$，$\{x;-1\leqslant f(x)\leqslant 3\}$和$\{x;f(x)=0\}$都是$R^k$的闭子集，而$\{x;f(x)>0\}$是开集。对于这些事实，学习分析的学生理应牢固掌握。

我们不打算举许多连续函数的具体例子。我们知道多项式函数和几个其它的函数是连续的，由这些函数可得到一些有意义的闭集的例子。

例 8 R^k上的任一线性函数是连续的，因此，任一超平面

(非零线性函数的等值面) 是闭集。R^k 的任一线性子空间是通过原点的几个超平面的交，因而，每一子空间是闭集。

在(实或复) $k\times k$ 矩阵空间上，由于行列式函数是矩阵中元素的多项式函数，因此行列式函数是连续的。于是，退化阵 (满足 $\det A=0$ 的矩阵)的集是闭集，可逆矩阵集是开集。在实的情形由于可逆矩阵集是集 $\{A;\det A>0\}$ 与集 $\{A;\det A<0\}$ 的并集，因此，可逆矩阵集是不连通的。一个 $k\times k$ 矩阵 A，如果满足 $AA^t=I$ 就称 A 是正交的，其中 A^t 表示 A 的转置矩阵(把 A 的行和列对调就得到 A^t)。正交矩阵集是 $R^{k\times k}$ 或 $C^{k\times k}$ 的闭子集，这是由于它是连续函数

$$F(A)=AA^t$$

的等值面。

对实的 $k\times k$ 正交矩阵，由于

$$|A|^2=k,$$

因此，实正交矩阵集是紧集。

R^k 中任一非空闭集都是某个连续函数的一个等值面，知道这一点很有用处。设 E 是 R^k 中非空闭集，对每一 x，考虑从 x 到 E 的距离：

$$d(x,\ E)=\inf\{|x-y|;\ y\in E\}.$$

也可以对任一非空开集 E 定义一点到它的距离，显然有：$d(x,\ \bar{E})=d(x,\ E)$，所以只要讨论闭集 E 就行了。需要注意两件事：

(i) $d(x,\ E)=0$ 的充要条件是 $x\in E$。

(ii) 至少存在一点 $y\in E$，使得

$$|x-y|=d(x,\ E).$$

从闭集的定义易得 (i)。现证明性质 (ii)。给定 x，在 E 中任选一点 z。显然，E 中和 x 最近的点必在闭球 $\bar{B}=\bar{B}(x;\ |x-z|)$ 中。因此，

$$d(x, E)=\inf\{|x-y|; y\in \bar{B}\cap E\}.$$

紧集$\bar{B}\cap E$上的函数$f(y)=|x-y|$是连续的，于是下确界可以在某一点y达到(这样的y可以不止一点)。

"对E的距离"函数是连续的，这是由于

$$|d(x_1, E)-d(x_2, E)|\leqslant|x_1-x_2|.$$

定理 3 设E和K是R^k的不相交闭子集，则在R^k上存在实值连续函数f，使得

(i) $0\leqslant f\leqslant 1$;

(ii) $K=\{x; f(x)=1\}$;

(iii) $E=\{x; f(x)=0\}$.

证明 若K和E是空集，就无需证明了。若K是空集，但E不空，取

$$f(x)=\frac{d(x, E)}{1+d(x, E)}.$$

而当E是空集而K不空时，也可同样做。若E, K都不空，取

$$f(x)=\frac{d(x, E)}{d(x, K)+d(x, E)}.$$

这一函数满足性质(i), (ii)和(iii)。

定理 3 常常这样使用：给定闭集K和包含K的开集U，要找一个连续函数f, $0\leqslant f\leqslant 1$, 在K上$f=1$, 而在U外$f=0$。在定理 3 中，取$E=R^k-U$，就可看到上述函数确实存在。

距离函数$d(x, E)$表示用E中点去逼近点x的程度。存在$y\in E$, 使得$|x-y|=d(x, y)$的事实表明E中有一点，它是E中点对x的最佳逼近点。没有理由认为y是唯一的。E中可以有许多最佳逼近点。有一个重要的集类，就是闭凸集，它有唯一的最佳逼近点。这些集类有种种应用，因此我们再说几句。

如果对集K中每一对不同的点x、y, x和y之间的线段也在K内，集K就是**凸集**。也就是说，若x、y在K内，则

$$(tx+(1-t)y)\in K, \quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

闭球和线性子空间是闭凸集的例子．半空间是基本的闭凸集．设 f 是 R^k 上非零线性泛函，c 是一实数，集 H

$$H=\{x; f(x)\leqslant c\}$$

称为 R^k 中的(闭的)**半空间**．这一泛函的形式是

$$f(x)=a_1x_1+\cdots+a_kx_k,$$

其中 $a_1, \cdots, a_k$ 是实数，它们不同时为零．超平面 $\{f=c\}$ 决定了两个(闭的)半空间：$\{f\leqslant c\}$ 和 $\{f\geqslant c\}=\{-f\leqslant -c\}$．所以，正象超平面由线性方程

$$a_1x_1+\cdots+a_kx_k=c,$$

所决定一样，半空间由线性不等式

$$a_1x_1+\cdots+a_kx_k\leqslant c$$

所决定．

第一章里曾讨论过 R^k 的"线性的"或平坦子集(直线、平面等)．这些都可以用以下等价条件来描述：

(a) 若 x, y 在 K 中，过 x 和 y 的直线也在 K 中．

(b) K 是几个超平面的交，也就是 K 可以由线性方程组来描述．

(c) K 是 R^k 的线性子空间的平移．

我们要指出在闭集 K 上的以下条件是等价的：

(a) K 是凸的．

(b) K 是几个半空间的交，也就是 K 可以用一组(可以是无限个)线性不等式来描述．

定理 4 设 K 是 R^k 中的闭凸集．若 $x\in R^k$，则在 K 中只有一点最靠近 x，也就是在 K 中有一点也只有一点 y，使得

$$|x-y|=d(x, K).$$

证明 若 $|x-y|=|x-z|$，且 $y\neq z$，则 $\frac{1}{2}(y+z)$ 比 y 和 z 更

接近 x。仅就 $x=0$ 的情况验证，利用下面的平行四边形定律即得证明：

$$|y-z|^2=2(|y|^2+|z|^2)-|y+z|^2$$
$$=2(|y|^2+|z|^2)-4\left|\frac{1}{2}(y+z)\right|^2.$$

（其实，使用三角不等式更简单。）

在K是线性子空间的情形，对 x 的最近点是 x 在K上的正交投影（参见第一章）。其实，任一闭凸集K定义了一个"投影"。若 $y\in K$ 并且 $|x-y|=d(x, K)$，则可用 $y=P_K(x)$ 定义函数

$$R^k \xrightarrow{P_K} K.$$

y 是用K中元逼近 x 的唯一的最佳逼近点，因此函数 P_K 就定义好了。图 11 显示了几个点和它们在K中的最佳逼近：$y_j=P_K(x_j)$

我们也有

(a) P_K 是连续的；

(b) $P_K(P_K(x))=P_K(x)$；

(c) $P_K(x)=x$ 当且仅当 $x\in K$。

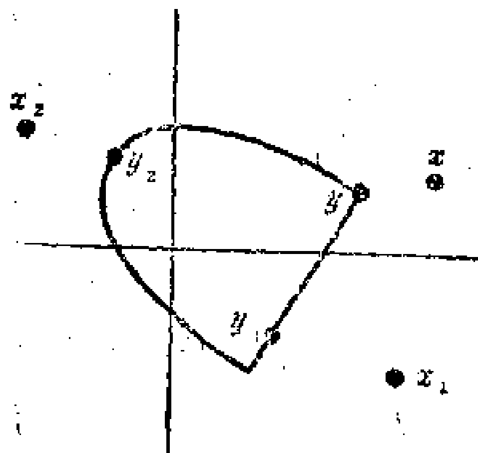


图 11

在 R^k 中取不属于K的任一点 x，令 $y=P_K(x)$。于是K全部位于通过 y 和 $x-y$ 正交的超平面的一侧（证明留作习题）。该超平面是

$$y+(x-y)^{\perp}=\{z;\langle z, x-y\rangle=\langle y, x-y\rangle\}.$$

换句话说，超平面是

$$\{z;f(z)=f(y)\},$$

式中 f 是线性泛函"$x-y$ 的内积"：

$$f(z)=\langle z, x-y\rangle.$$

根据 $f(x)>f(y)$ 或 $f(x)<f(y)$，K 是下述两个半空间之一，满

足 $f \leqslant f(y)$ 的半空间或满足 $f \geqslant f(y)$ 的半空间。

定理 5 任一闭凸集是几个半空间的交。

在投影 P_K 的性质中只有连续性不是显然的。现在，在本节结束时我们来指出应该如何去证明它。设 $y=P_K(x)$，我们要选择 $\delta>0$，使对一切向量 z，当 $|x-z|<\delta$ 时，有 $|y-P_K(z)|$ 是小的。假如 $\delta>0$，δ 是小的，并且 z 满足 $|x-z|<\delta$。令 $w=P_K(z)$，我们得到下列不等式，理由写在不等式右边：

$$
\begin{aligned}
|x-w| &\geqslant |x-y|, && y=P_K(x)\\
|x-w| &\leqslant |z-w|+\delta && |x-z|<\delta\\
&\leqslant |z-y|+\delta && w=P_K(z)\\
&\leqslant |x-y|+2\delta, && |x-z|<\delta.
\end{aligned}
$$

因此，

$$|x-y| \leqslant |x-w| \leqslant |x-y|+2\delta.$$

设 δ 是小的，此时能推出 w 靠近 y 的结论吗？不能，但是如果我们加进条件就可以了。条件是：(因为K是凸的)从 y 到 w 的线段上的每一点到 x 的距离大于等于 y 到 x 的距离。由于涉及到三个向量，只需在平面上验证即可。就是说设 x 和 y 是平面上的点，w 是这样的一个点，它使得从 y 到 w 的线段位于中心是 x 半径分别为 $|x-y|$ 和 $|x-y|+2\delta$ 的两个同心圆之间，并且设 δ 是小的，则 w 就靠近 y。

习　题

1. 设 f 是 R^k 上实值连续函数，K是R的一个紧子集，那么 $f^{-1}(K)$ 是紧集吗？

2. 设从 R^k 到 R^m 的函数F是连续的，并且S是 R^m 的子集，试问 $F^{-1}(\bar{S})$ 是 $F^{-1}(S)$ 的闭包吗？

3. 设 f 和 g 是 R^k 上复值连续函数，则 $\{x; f(x)=g(x)^2\}$ 是闭的。

4. 证明函数

$$R^k \xrightarrow{F} R^m$$

为连续的充要条件是对任一集 $S\subset R^m$, $F^{-1}(S)$ 的边界被包含在 F^{-1} (S 的边界)中。

5. 设D是 R^k 的连通子集，在D上有一个实值连续函数，它处处不为零。证明函数必处处为正或者处处为负。

6. 设D是 R^k 的不连通子集。证明在 R^k 上有一个连续实值函数，它在D上处处不为零，但它在D的一些点取正值，另一些点取负值。(提示：利用距离函数和第二章定理14。)

7. 设f是 R^k 上的实函数，并且对R中任一开集V，$f^{-1}(V)$是闭的。关于f你能说些什么呢？把开和闭对调一下又将如何？

8. 证明定理4的逆定理：设K是 R^k 的子集，如果 R^k 的每一点在K中有唯一的最佳逼近点，则K必是闭凸集。

9. 设D是 R^k 的开子集，F是D上的连续函数：

$$D\xrightarrow{F}R^m,$$

设K是D的闭子集。证明存在连续函数G

$$R^k\xrightarrow{G}R^m,$$

使对一切 $x\in K$ 有$G(x)=F(x)$。

10. 设E是闭凸集和K是紧凸集，则E和K可以被超平面所分开。也就是说，有一个非零的线性函数f和数c，使在E上 $f>c$ 而在K上 $f<c$。(提示：代数和 $E+(-K)$是哪一类集?)

11. 凸集K的**极值点**是这样的一个点 $y\in K$，它不在连结K中任意两个不同点的线段上。也就是说，若 x_1，x_2 在K中，并且

$$y=\frac{1}{2}(x_1+x_2),$$

则 $x_1=x_2=y$。

(a) 开凸集没有极值点。

(b) 非空紧凸集有极值点。

*(c) 紧凸集K由一切凸组合

$$t_1y_1+\cdots+t_ny_n,\ t_j\geqslant0,\quad \sum_j t_j=1$$

所组成，式中 y_1, …, y_n 是K的极值点。

*12. 设S是 R^k 中任一集，则包含S的最小凸集由一切凸组合

$$\sum_{j=1}^{n}t_jy_j,\quad y_j\in S,\quad t_j\geqslant0,\quad \sum_j t_j=1$$

所组成，其中 $n\leqslant k+1$ (S中n个点的一切凸组合)。

3.3 函数极限

连续性也可以用函数在一点的极限概念来描述。这一概念和序列的极限概念类似。

定义 设F是函数

$$D\xrightarrow{F}R^m,\quad D\subset R^k,$$

令x_0是集D的聚点，若以下条件成立，就称F**在x_0点有极限**L：

(i) $L\in R^m$;

(ii) 若V是L的任一邻域，则存在点x_0的邻域U，使对每一$x\in D\cap U$，$x\neq x_0$，有

$$f(x)\in V.$$

当(i)，(ii)成立时，记

$$L=\lim_{x\to x_0}F(x).$$

如果存在$L\in R^m$，使

$$L=\lim_{x\to x_0}F(x),$$

就称F在x_0**有极限**或$\lim\limits_{x\to x_0}F(x)$**存在**。(由于$x_0$是$D$的聚点，因此，若极限存在，它必是唯一的。)

引理 设x_0是定义域D的一个聚点，L是R^m中一点，则下述条件等价：

(i) $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=L$;

(ii) 对任意$\varepsilon>0$，一定存在数$\delta>0$，使对D中任意的x，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|F(x)-L|<\varepsilon$;

(iii) 若$\{x_n\}$是D中的点序列，$x_n\neq x_0$，并且$\{x_n\}$收敛于x_0，则$\{F(x_n)\}$收敛于L。

(iv) 令$D_0=D\cup\{x_0\}$，设F_0是D_0上的函数，它的定义是：

$$F_0(x)=\begin{cases}F(x), & \text{当 } x\in D,\ x\neq x_0,\\ L, & \text{当 } x=x_0,\end{cases}$$

则 F_0 在点 x_0 连续。

证明 点 x_0 在 D 的闭包中，x_0 可在 D 中，也可以不在 D 中。"F 在 x_0 的极限"的定义并没有提到是否有 $x_0 \in D$，即使 $x_0 \in D$，极限的定义也是和 $F(x_0)$ 完全无关。应该透彻地理解这一点。懂得这点，就可明白 (iv) 确实是极限的另一种定义。显然，(ii) 和 (iii) 是 (i) 的另一形式。

定理 6 设 x_0 是 D 的聚点，则 F 在 x_0 点是连续的充要条件是

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0).$$

引理 设 x_0 是 D 的一聚点。下列陈述是等价的：

(i) F 在 x_0 有极限；

(ii) 对 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使对 D 中的一切点 x_1，x_2，当

$$0 < |x_1 - x_0| < \delta,$$
$$0 < |x_2 - x_0| < \delta$$

时，有 $|F(x_1) - F(x_2)| < \varepsilon$。

(iii) 若 $x_n \in D$，$x_n \neq x_0$，$x_0 = \lim x_n$，则 $\{F(x_n)\}$ 是 Cauchy 序列。

证明 只证明从 (iii) 推到 (i) 假如 (iii) 成立，要证明序列 $\{F(x_n)\}$ 的极限和序列 $\{x_n\}$ 无关。设有两个序列：

$$x_0 = \lim_n x_n, \quad x_n \in D,\ x_n \neq x_0,$$
$$x_0 = \lim_n y_n, \quad y_n \in D,\ y_n \neq x_0,$$

令

$$L = \lim_n F(x_n),$$
$$M = \lim_n F(y_n),$$

则序列 x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, … 收敛于 x_0。根据 (iii)，序列 $F(x_1)$, $F(y_1)$, $F(x_2)$, $F(y_2)$, …是 Cauchy 序列，因此不可能出现 $L \neq M$。

明显地，我们能够叙述几件基本事实。例如，和的极限是极限之和，等等。这些结果可以从序列的对应结果或连续函数的对应结果得到。但是，最好的办法是要明白这样一件事：函数在一点的极限的情况和序列极限情况相同，因此可以一样地推导出来。认识下列两件事有类似性是有好处的：(1) 在$\lim\limits_{x\to x_0}F(x)$的定义中不讨论 $F(x_0)$；(2) 序列$\{x_n\}$没有最后项。

值得指出，函数的定义域是函数的组成部分。极限的讨论就是这样一种情形，那时，定义域是很重要的。可以用同样的法则来定义各种集上的函数，定义域的改变可以影响到在某一点极限的存在性问题。我们作一个约定：若函数用一个规律（关系）来定义，但是没有明白地提到定义域，那么，函数的定义域就是使该规律（关系）有意义的 R^k 的最大子集。

例 9 由

$$f(x)=\frac{x}{|x|},\quad x\neq 0,$$

定义的函数 f 在 $x=0$ 点没有极限。因此，不能把 f 扩张为 R 上的连续函数。由

$$g(x)=\frac{x}{|x|},\quad x>0$$

定义的函数 g 在 $x=0$ 点有极限。

例 10 定义

$$f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right),\quad x\neq 0,$$

则 f 在 0 点没有极限，这是因为 f 振动地接近于 0，f 振动时取 1 和 -1 之间的值（看图 12）。例如，序列

$$x_n=\frac{2}{n\pi}$$

收敛于 0，但值 $f(x_n)$ 是 1，0，-1，0，…

例 11 设

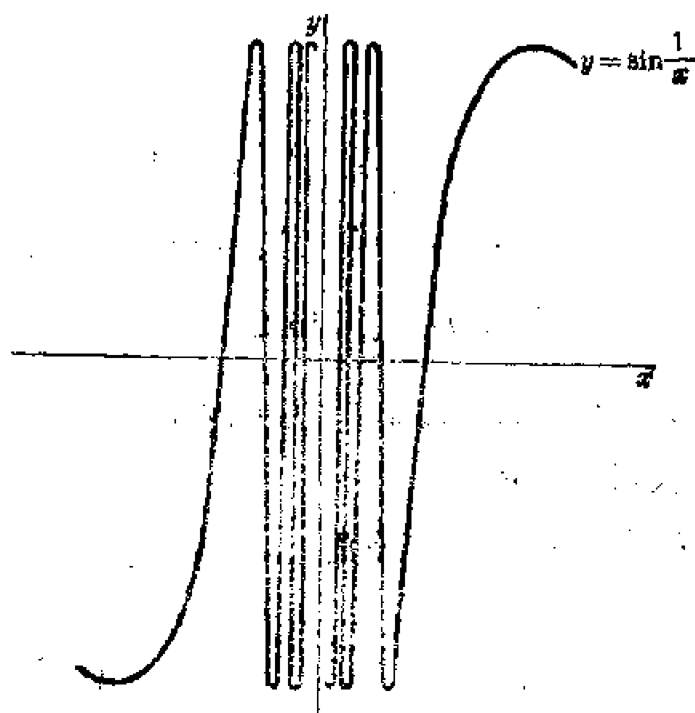


图 12

$$g(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right),\quad x\neq 0,$$

则

$$\lim_{x\to 0} g(x)=0.$$

这是因为$|g(x)|\leqslant|x|$(图 13)。如果在点 0 的值定义为 0，则 g 可

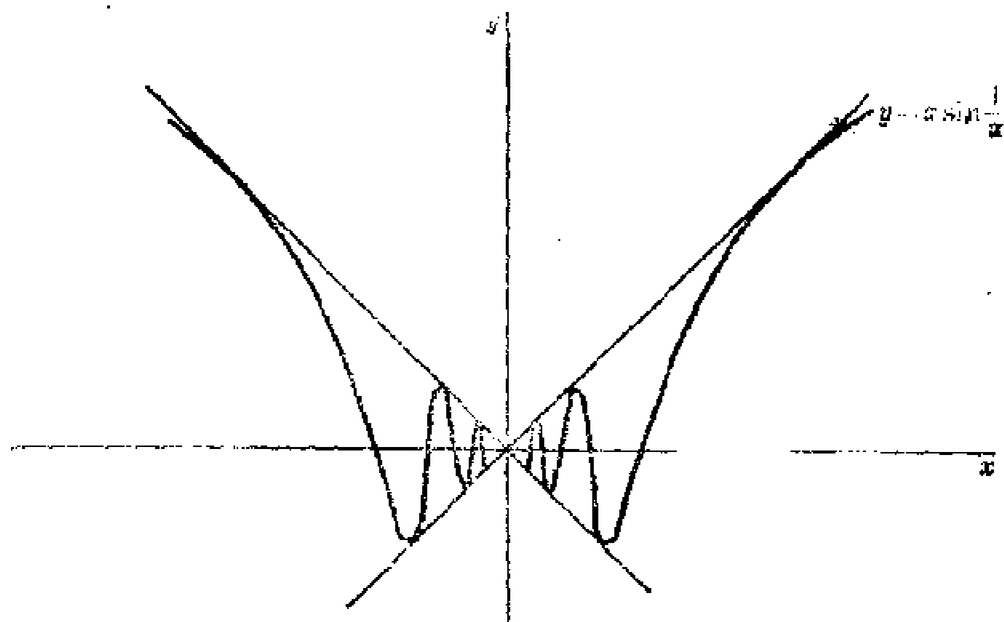


图 13

以扩张为 R 上的连续函数。

例 12 设

$$f(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2 \neq 0,$$

则 f 在原点没有极限。令 $x=r\cos\theta$ 和 $y=r\sin\theta$，则

$$f(x, y)=\frac{1}{2}\sin 2\theta.$$

若把 f 限制到通过原点的直线，则在(0, 0)有极限。但注意，沿各种不同的直线，极限是不同的。

例 13 设 F 是可逆 $k\times k$ 矩阵集上的逆函数：

$$F(A)=A^{-1}, \quad (A\text{可逆})$$

设 B 是 $k\times k$ 不可逆矩阵。由于可逆矩阵集在 $k\times k$ 矩阵空间中稠密，因此，B 是 F 定义域的聚点。那么，F 在 B 点是否有极限呢？没有。这是因为：不存在可逆矩阵 A_n 的序列，使得 $B=\lim\limits_n A_n$，且序列 $\{A_n^{-1}\}$ 收敛。不然，如果有

$$\lim_n A_n=B,$$

$$\lim_n A_n^{-1}=C,$$

则就有

$$\lim_n I=BC,$$

从而 B 是可逆的，但这是矛盾的。

习 题

1. 证明在 $k\times k$ 矩阵空间中

$$\lim_{A\to 0} e^A=I.$$

2. 设 A 是一个 $k\times k$ 矩阵，则

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{tA}-I}{t}=A.$$

3. 设

$$f(x)=\exp\left(\frac{1}{x}\right), \quad x\neq 0.$$

则 f 在 0 点没有极限。

4. 设

$$f(x)=\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),\quad x\neq 0.$$

如果 k 是任一正整数，则

$$\lim_{x\to 0} x^{-k} f(x)=0.$$

5. 设 $D=\{z\in C;\ |z|<1\}$ 是平面上的开单位圆盘。令

$$f(z)=(1-z)\exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right),\ y\in D.$$

证明

$$\lim_{z\to 1} f(z)=0.$$

(i) 若 w 是复数，则

$$|e^w|=e^{Re(w)}.$$

(ii)
$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=\frac{|z|^2-1}{|1-z|^2}.$$

(iii)
$$\left|\exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right|<1,\quad |z|<1.$$

所以

$$\lim_{z\to 1} f(z)=0.$$

6. 设

$$f(z)=(1-z)\exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right),\quad z\in C,\ z\neq 1,$$

则 f 在 $z=1$ 没有极限。

7. 在有理数集上定义函数 f 如下：若 x 是非零有理数，$x=p/q$，式中 $p\in Z$，$q\in Z_+$，并且 p，q 互质（没有非平凡公因子），则令 $f(x)=1/q$，若 x 是无理数或零，则定义 $f(x)=0$。证明对每一实数 x，有

$$\lim_{t\to x} f(t)=0.$$

并问哪些点是 f 的连续点？

8. 对实直线上的函数，可讨论左极限和右极限。假如

$$D\longrightarrow R^m,\quad D\subset R,$$

并且 x 是 D 的两侧聚点。请先给出这一类型聚点的定义，并进行定义（如果它们存在）

$$\lim_{t\to x_-} F(t)\ \text{和}\ \lim_{t\to x_+} F(t).$$

9. 设 f 是实直线上的实值增函数：

$$f(x)\leqslant f(t),\quad x\leqslant t.$$

在每一点 x，f 的左极限和右极限存在（见习题 8），则 f 只有可列个不连续点（利用2.5节习题 12）。

10. 设 f 是 D 上实值函数，x_0 是 D 的聚点。应如何定义

$$\lim_{x\to x_0}\inf f(x) \text{ 和 } \lim_{x\to x_0}\sup f(x)?$$

证明每一个有界函数在 x_0 有 lim sup 和 lim inf；并且，只有当 lim sup 等于 lim inf 时，函数在 x_0 处才有极限。

3.4 无穷极限和在无穷远点的极限

要想在分析中工作得更有效，应知道下述结论：

(3.8)
$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0,$$

(3.9)
$$\lim_{x\to 0}\log|x|=-\infty.$$

介绍这些事并不比我们讨论过的极限更困难些。但是对大多数和无限有关的事情，要掌握它们的奥秘，仅仅从定义去理解是不够的。

处理象(3.8)和(3.9)这类极限最直接的途径是：先介绍**扩张实数系**，它是在实数系中再加上两个补充客体：∞ 和 $-\infty$。我们不准备说明这些客体是什么，只是要指出 $\infty\notin R$ 和 $-\infty\notin R$。把实数中的顺序拓广到扩大的数系中：

$$-\infty<\infty,$$

$$-\infty<x<\infty,\quad x\in R.$$

对扩大的数系补充定义加法和乘法：

$$x+\infty=\infty \text{ 和 } x+(-\infty)=-\infty,\quad x\in R,$$

$$x\infty=\infty,\quad x>0,$$

$$x\infty=-\infty,\quad x<0,$$

$$x(-\infty)=-(x\infty),\quad x\neq 0,$$

$$\infty^2=\infty,$$

$$\infty(-\infty)=-\infty,$$
$$(-\infty)^2=\infty.$$

简言之，除了 a, b 中一个是∞，另一个是$(-\infty)$ 的情形，定义了 $a+b$；除了 $a=0$ 或 $b=0$ 外，定义了 ab。除了$\infty+(-\infty)$和$0\cdot(\pm\infty)$外，我们可以进行的代数运算都是正确的。因此，通常的代数运算都保持了，但是这些代数运算是形式上的，我们很少用它们。

在扩大的实数系中，∞ 的邻域是一个子集，它包含∞，同时，对某个 $t\in R$，该子集也包含$\{x\in R; x>t\}$。用 $-\infty$代替∞，用 $x<t$ 代替 $x>t$，就得到了 $-\infty$ 的邻域的定义。

象以前一样，我们利用邻域定义极限，并说明(3.8)和(3.9)的意义。例如，设 f 是 R^k 的子集上的实值函数：

$$D\xrightarrow{f}R,\quad D\subset R^k.$$

那末，

(3.10)
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty,$$

是什么意思呢？它的意思是：x_0 是D的聚点，并且对∞的任一邻域V存在 x_0 的邻域 U，使 $f(U-\{x_0\})\subset V$。换句话说，对每一实数 t，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in D$，$0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$f(x)>t,$$

举另一个实例。设F是R的子集上的向量值函数：

$$D\xrightarrow{F}R^m,\quad D\subset R.$$

(3.11)
$$\lim_{x\to\infty} F(x)=L$$

是什么意思呢？它的意思是："∞是D 的聚点，并且对每一个 $\varepsilon>0$，存在 $t\in R$，使得当 $x\in D$，$x>t$ 时

$$|F(x)-L|<\varepsilon,$$

术语"∞是D的聚点"不太确切，它的意思是D不是有上界的。注

意，当D是正整数集时，F是序列，极限就是以前定义过的序列极限。

为了简便，我们常常用"无穷极限"这样的说法。但应记住：假如f是实值函数，并且我们说f在x_0点有极限，这是指在R内存在象3.3节所介绍的极限。而如果要说

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty,$$

我们应该特别指明。

在扩大的实数系上，对实直线上任意集S，可形式地定义$\sup S$和$\inf S$。在扩大的实数系中，每一个集有一个上确界和下确界，分别用$\sup S$和$\inf S$来记，例如

$$\sup S=\infty$$

表示S非空，且无上界。因为$\sup\varnothing=-\infty$和$\inf\varnothing=\infty$，所以我们通常只对非空集讨论sup和inf。

习　题

1. 设f，g和h是集D（R^k的子集）上的实值函数，x_0是D的聚点。假如$f\leqslant g\leqslant h$，而f，h在x_0处有相同的极限，则g在x_0处也有同一极限。

2. 给

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$$

下个定义，但不要提到∞或$-\infty$。

3. 设p是复系数的多项式，则

$$\lim_{x\to\infty} p(x)e^{-x}=0.$$

4. 设f是实直线上的增函数：

$$f(x)\leqslant f(t),\quad x\leqslant t,$$

并且f是有界的，则

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

存在。

5. 求：

(a) $\lim_{x\to\infty}\exp(1/x)$；

(b) $\lim_{x\to-\infty}\exp(1/x)$。

6. 设 f 是实直线上的实值连续函数，对任一 $\varepsilon>0$，集

$$\{x;\ |f(x)|\geqslant\varepsilon\}$$

是紧的，证明

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0.$$

7. 在扩大的实数系中，我们已定义了∞和$-\infty$的邻域。试用这些邻域来定义扩大数系中的开集，方法可按照 R^k 中同样的定义方法。并证明扩大的实数系是紧的。

3.5 连续映射

本节包括两个定理，它们的证明十分容易，但用途却很广泛。这些定理说明连续映射保持紧性和连通性。连续函数F

$$D\xrightarrow{F}R^m,\quad D\subset R^k,$$

有这样的性质：对 R^m 中每一开集V，$F^{-1}(V)$是相对于D的开集。同样地，对 R^m 中每一个闭集 S，$F^{-1}(S)$ 是相对于D的闭集。一般说来，连续函数F并不象 F^{-1} 那样，也就是F不保持开集和闭集。但是，若K是紧的，则 $F(K)$ 也是紧的；若K是连通的，则$F(K)$也是连通的。

定理 7 设F是连续函数，K是F定义域内的紧子集，则$F(K)$是紧的。

证明 不妨设 $K=D$，这样做把F限制到K，使F成为从K到 R^m 中的连续函数。设 $\{V_\alpha;\alpha\in A\}$是 $F(D)$ 的一个开覆盖。令

$$U_\alpha=F^{-1}(V_\alpha),$$

则 $\{U_\alpha;\alpha\in A\}$ 是D的覆盖。因为F是连续的，所以每一个 U_α 是相对于D的开集。又因为D是紧的，因此A中存在指标$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，使得

$$D=U_{\alpha_1}\cup\cdots\cup U_{\alpha_n},$$

则

$$F(D)\subset V_{\alpha_1}\cup\cdots\cup V_{\alpha_n}.$$

于是，从$F(D)$的每一个开覆盖中能够得到一个有限子覆盖。所以，$F(D)$是紧的。

系 设F

$$D\xrightarrow{F}R^m$$

是连续的，D是紧集，则F是有界的，并且D中存在点x_0，使得

$$|F(x_0)|=\sup|\{F(x)\};x\in D|.$$

证明 由于F连续，$|F|$也就连续。于是，$|F|$的值域是紧的，并且包含它的上确界。

系 设f是紧集D上的实值连续函数，则在D中存在点x_1，x_2，使得

$$f(x_1)=\sup\{f(x);x\in D\},$$

$$f(x_2)=\inf\{f(x);x\in D\}.$$

注意，若F的定义域是紧的，则F把闭集映射成闭集：设K是D的闭子集。因为D是紧的，故K也是紧的，从而$F(K)$是紧的，由此可得$F(K)$是闭的。但是不能由此得出F把D的开子集映射成相对于$F(D)$的开集。回忆一下，交的运算在F下一般不能保持。因此，我们不能指望由上述把闭集映射成闭集的结论推出开集的相应结论。

定理7可以用别的方法来证明。设D是有界闭集，F连续，可以这样来证明$F(D)$是有界闭集：设$\{y_n\}$是$F(D)$中任一点列。对每一个n，在D中选出一点x_n，使$y_n=F(x_n)$。因为D是有界的，由 Bolzano-Weierstrass 定理，存在子点列$\{x_{n_k}\}$，它收敛于某一点x。由于D是闭集，所以x在D中。又因为F是连续的，故序列$\{y_{n_k}\}$收敛于$F(x)$。我们证明了$F(D)$中的任一序列有收敛于$F(D)$中一点的子序列，因此，$F(D)$是有界闭集。

定理8 设F是连续函数，K是定义域D的连通子集，则

$F(K)$是连通的。

证明 不妨设 $K=D$。设 S 是 $F(D)$ 中相对于 $F(D)$ 又开又闭的子集。因为 F 连续，故 $F^{-1}(S)$ 是相对于 D 又开又闭的集。由于 D 是连通的，因而，$F^{-1}(S)$ 只能是空集或者 $F^{-1}(S)=D$。所以，或者 S 是空集，或者 $S=F(D)$。

系 设 D 是实直线上的一个区间，f 是 D 上的实连续函数，那末只有两种可能：f 是常数或者 $f(D)$ 是一个区间。

证明 R 的连通子集是空集、单元素集和区间。

系 设 $D=[a, b]$ 是实直线上的闭（有界）区间，f 是 D 上连续的非常数的实值函数，则 $f(D)$ 是一个闭(有界)区间。

证明 集 $f(D)$ 是紧的，连通的，并且包含不止一点。显然，$f(D)=[m, M]$，其中

$$m=\inf\{f(x),\ a\leqslant x\leqslant b\},$$

$$M=\sup\{f(x),\ a\leqslant x\leqslant b\},$$

把微积分教程中的两个基本定理结合起来就得到最后的系。这两个定理是：(1) 在闭区间上的实连续函数可达到它的最大值和最小值。(2) 在区间上的实连续函数有介值性质：若 $f(x_1)=y_1$ 和 $f(x_2)=y_2$，则在 x_1 和 x_2 之间，f 取到 y_1 和 y_2 之间的每一个值。

关于在区间上的实连续函数 f，介值性质指出，除了 f 是严格增加或严格减少外，不可能是一一对应的。如果当 $x<y$ 时，

$$f(x)<f(y),$$

f 就是**严格增加**的。如果当 $x<y$ 时，

$$f(x)>f(y),$$

f 就是**严格减少**的。如果 f 是区间 $[a, b]$ 上严格增加的连续函数，那末可以定义反函数 f^{-1}：

$$[a, b]\xrightarrow{f^{-1}}[f(a),\ f(b)].$$

自然，在这一特别情形下，f^{-1} 是连续的。

定理 9 设 f 是区间 $I\subset R$ 上连续而且严格增加的函数，则 $f(I)$ 是一个区间，并且

$$I\xleftarrow{f^{-1}}f(I)$$

是连续的。

证明 因为 f 将 I 的每一个闭区间 $[a, b]$ 映射成闭区间 $[f(a), f(b)]$，开区间 (a, b) 的象一定是 $[f(a), f(b)]$ 删去两点 $f(a)$，$f(b)$：

$$f((a, b))=(f(a), f(b)).$$

因此，f 把开集映射成开集，也就是 f^{-1} 是连续的。

对闭区间的情形，定理 9 是以下基本定理的特殊情况。

定理 10 设 F 是紧集 D 上的连续函数，且 F 是一一对应的，则反函数

$$D\xleftarrow{F^{-1}}F(D)$$

是连续的。

证明 因为 D 是紧的，D 的每一个闭子集也是紧的。因此，F 把闭集映射成闭集。由于 F 是一一对应，所以函数 F^{-1} 有定义。若 K 是 D 的闭子集，则

$$(F^{-1})^{-1}(K)=F(K)$$

是闭的，所以 F^{-1} 连续。

例 14 这是定理 9 的实例。可以用这样的方法来证明 n 次根的存在性。设

$$f(x)=x^n, x\geqslant 0.$$

由于定义域 $D=[0, \infty)$ 是一个区间，而 f 连续，故 $f(D)$ 是一个区间。考虑到 $f(x)\geqslant 0$，$f(0)=0$，和 f 不是有界的，结论是 $f(D)=[0, \infty)$。所以，每一个 $t\geqslant 0$ 是某一 $x\geqslant 0$ 的 n 次幂。在 D 上，f 是一一对应，所以反函数

$$f^{-1}(t)=t^{1/n}$$

是连续的。

为了下面的几个例子，我们需要知道指数函数是连续的。这将作为一个引理来证明它。我们建议读者先看一下例题，然后再回到引理的证明。

引理 $k\times k$ 矩阵的指数函数是连续的。

证明 根据定义

$$e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n=\lim_n p_n(A),$$

式中

$$p_n(A)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A^k.$$

因为 p_n 是多项式函数，所以连续。现在 p_n 逼近指数函数，于是指数函数连续这一点似乎是对的，然而，这样的理由还不能作为证明。我们需要知道 $p_n(A)$ 究竟是怎样逼近 e^A 的。我们知道

$$|e^A-p_n(A)|\leqslant\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}|A|^k.$$

由于

$$e^A-e^B=e^A-p_n(A)+p_n(A)-p_n(B)+p_n(B)-e^B,$$

所以有

$$\begin{aligned}|e^A-e^B|&\leqslant|e^A-p_n(A)|+|p_n(A)-p_n(B)|\\&+|p_n(B)-e^B|\leqslant\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}|A|^k+|p_n(A)-p_n(B)|\\&+\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}|B|^k=|p_n(A)-p_n(B)|\\&+\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}[|A|^k+|B|^k].\end{aligned}$$

上式对任何 n 成立。

固定 A，若 B 充分接近 A，要保证 $|e^A-e^B|<\varepsilon$，可令 $|A-B|<1$，于是 $|B|<1+|A|$，并且

$$|A|^k+|B|^k<2(1+|A|)^k.$$

从而

$$|e^A-e^B|\leqslant|p_n(A)-p_n(B)|+R_n,$$

式中

$$R_n<2\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}(1+|A|)^k.$$

现在 $1+|A|$ 是一固定正数，所以

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{k!}(1+|A|)^k<\infty.$$

如果 $\varepsilon>0$，选择 N，使得

(3.12) $$\sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{k!}(1+|A|)^k<\frac{\varepsilon}{4},$$

于是，对这个 N，当 $|A-B|<1$ 时

$$|e^A-e^B|\leqslant|p_N(A)-p_N(B)|+\frac{\varepsilon}{2},$$

对此固定的 A 和固定的 N（它依赖于 A），因为 p_N 是连续的，必存在 $\delta>0$，使得当 $|A-B|<\delta$ 时，

$$|p_N(A)-p_N(B)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

不妨设 $\delta<1$，就有

(3.13) $$|e^A-e^B|<\varepsilon,\quad |A-B|<\delta.$$

例 15 看一下实直线上的指数函数

$$f(x)=e^x,\quad x\in R.$$

我们知道 f 是连续的。2.3 节的例 9 指出

$$f(x+t)=f(x)f(t).$$

从级数的定义显然有，当 $x>0$ 时 $f(x)>1$。由于 $e^xe^{-x}=1$，易知当 $x<0$ 时有 $f(x)<1$。因此 f 是严格增加的：

$$e^t=e^{t-x}e^x<e^x,\quad t<x.$$

所以 f 的象是一个区间，它含在 $(0,\infty)$ 内，因为

$$f(n)=f(1)^n$$
$$>2^n.$$

所以 f 不是有界的。因此，f 的象是区间 $(0,\infty)$。结论是：若 $y>0$，则存在唯一的一个实数 x，使得

$$y=e^x.$$

反函数 f^{-1} 叫做（自然）对数函数

$$x=\ln y,$$

也就是

$$e^{\ln y}=y,$$

并且，这一函数是连续的。

例 16 让我们来推导这样一个事实：任一绝对值为 1 的复数具有形式 e^{it}，t 是某一实数。设 F 是从 R 到 C 的映射，由下式定义：

$$F(t)=e^{it},\quad t\in R.$$

由于 $e^{it}e^{-it}=e^0=1$ 并且 $e^{-it}=(e^{it})^*$，我们有

$$|e^{it}|=1.$$

于是 F 把 R 映射到单位圆内。那么，F 映射到圆上的理由是什么？无疑地，F 不是常数，因为 $F(0)=1$，而

$$F(2)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}i^n$$

所以

$$\mathrm{Re}F(2)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{4^k}{(2k)!}=1-2+\frac{2}{3}-\cdots<0.$$

关于 F 的象我们知道些什么呢？F 的象是单位圆的连通子集，它包含 1 和数 $w=F(2)$，并且 $\mathrm{Re}w<0$。因此，$-w$ 和 $-w^*$ 中有一个在 F 的象中（否则，通过 $-w$ 和 $-w^*$ 的直线将分隔象，见图14）。假定 $-w^*$ 在 F 的象中，因为 $F(-t)=F(t)^*$，所以，F 的象关于实轴是对称的。于是 $-w$ 也在 F 的象中；

$$-w=F(a),\quad a\in R.$$

又因为 $F(2)F(a-2)=F(a)=-F(2)$，就有 $F(a-2)=-1$。1 和 -1 同时在(连通的)象中的事实说明 F 的象充满单位圆。

函数 $F(t)=e^{it}$ 肯定不是一一对应的。事实上(如已知道的)，它是周期的。若 $F(b)=-1$，则 $F(2b)=1$。所以集

$$S=\{t\in R;F(t)=1\}$$

包含非零的数。令

$$c=\inf\{t\in S;t>0\},$$

容易证明 $c>0$，而 S 由一切 c 的整数倍所组成。数 c 就是 2π。

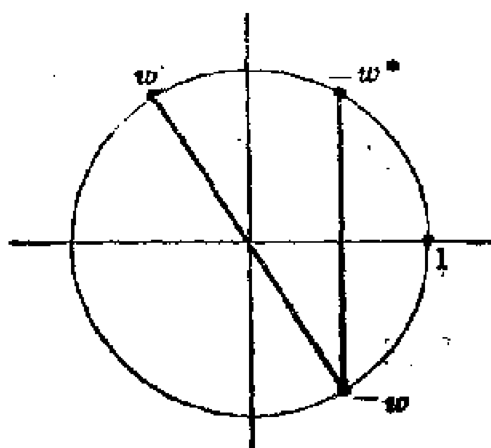


图 14

例 17 我们不能从定理 10 中去掉 D 是紧集这一假设。试看映射

(3.14) $\quad F(t)=e^{it},\ 0\leqslant t<2\pi,$

则 F 是连续的，而且是从区间 $[0,2\pi)$ 到平面上单位圆上的一一对应。但 F^{-1} 不是连续的，因为它在 $z=1$ 有"跳跃"。

例 18 设有从 $k\times k$ 矩阵到可逆 $k\times k$ 矩阵内的指数映射

$$F(A)=e^A,$$

那末它是到上的映射吗？也就是说，对每一可逆矩阵有一个对数吗？在实的情形，这是不对的。因为一切 $k\times k$ 矩阵空间是连通的(它是 R^{k^2})，F 的象是连通的。但是可逆 $k\times k$ 实矩阵集是不连通的，这可由行列式函数看出。可逆 $k\times k$ 实矩阵集是带有正行列式的矩阵集和负行列式的矩阵集的并集。对一切 $k\times k$ 实矩阵 A，显然有 $\det e^A>0$。在复的情形，F 是一个到上的映射，对此问题，我们将在以后再作讨论。

习　题

1. 若S是R的子集，集

$$S^2=\{x^2; x\in S\}$$

是紧的，S是紧集吗？

2. 若w是复数，$w\neq 0$，则必有某一$z\in C$，使$w=e^z$。

3. 对矩阵A，如果$A^t=-A$，就称矩阵A是斜对称的。证明：若A是斜对称的，则e^A是正交矩阵。任一正交阵必是这一形式吗？

4. 设点$(x, y)\in R^2$，x^2+y^2是无理数，则由这种点所组成的集是不连通的。

5. 点$(x, y)\in R^2$，x或y有一个是有理数，由这种点组成的集是不连通集吗？

6. 用序列证明定理10。

7. 证明每一个连续函数

$$[0, 1]\xrightarrow{f}[0, 1]$$

有一个不动点(即有一点x，使$f(x)=x$)。

8. 证明从$[0, 1)$到$[0, 1)$上的任一连续映射有一不动点。

9. 证明不存在$(0, 1)$到$[0, 1]$上的一一连续映射。

10. 设I是闭区间$[0, 1]$，S是R^2中闭正方形$I\times I$，则存在从I到S上的连续映射(这一事实难以想象)。你不要去证明上述事实，而是证明不存在从I到S上的一一连续映射。提示：当你在I中去掉点$\frac{1}{2}$，将发生什么？

11. 设

$$R^k\xrightarrow{F}R^m,$$

又设对一切紧集K，$F^{-1}(K)$是紧集，那末F是连续函数吗？

12. 如果一个函数是连续的，而且每一紧集的逆象是紧的，那末就称这个函数是**真映射**。

(a) 设F是真映射，K相对于F的定义域是闭集，那么，$F(K)$是闭集吗？

(b) 设F是真映射，而U是开集，$F(U)$是开的吗？

13. 设K_1和K_2是R^m中的紧集，则代数和

$$K_1+K_2=\{x_1+x_2;\ x_j\in K_j\}$$

是紧的。

14. 设T是从R^k到R^m中的线性变换，U是R^k中的一个开集，则$T(U)$相对于T的象是开集。这个结论正确吗？

15. 设D是R^k中的一个紧集，F是从D到R^m中的一个函数，假设F是有界的。则F是连续的当且仅当F的图象是R^{k+m}的闭子集。

16. 设f是从实直线到复数中的非零连续函数，对一切x，t，它满足

$$f(x+t)=f(x)f(t),$$

证明存在复数z，对一切t有$f(t)=e^{tz}$。

3.6 一致连续

设有函数

$$D\xrightarrow{F}R^m,\quad D\subset R^k. \tag{3.15}$$

我们定义函数的连续性是根据这样一个思想：如果x充分接近于x_0，则$F(x)$就靠近$F(x_0)$。但是，在定义连续性时，"充分接近"是随着定义域中的点的不同而有所变化的。对给定$\varepsilon>0$和给定的$x_0\in D$，可以找到$\delta>0$，使得当$|x-x_0|<\delta$时，

$$|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon,$$

"充分接近"用δ来测量，如同它依赖于ε一样，它也依赖于x_0。而对于某些函数，δ可选择得与x_0无关。

定义 设函数F由(3.15)定义，如果对任一$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当x_1，$x_2\in D$，$|x_1-x_2|<\delta$时，

$$|F(x_1)-F(x_2)|<\varepsilon,$$

则称函数F是**一致连续**的。

例 19 这里举一个连续但不一致连续的函数的最简单的例子。设

$$f(x)=x^2,\quad x\in R.$$

现在

$$f(x)-f(t)=x^2-t^2=(x+t)(x-t).$$

假如 $\varepsilon>0$，而我们希望找到 δ，使得 $|x-t|<\delta$ 时

$$|f(x)-f(t)|<\varepsilon, \tag{3.16}$$

固定 t 时，由于 $x+t$ 对任一固定的 t 不会太大，因此上述做法行得通。但是，如果我们想同时对一切点 x，t 来做，因为 $x+t$ 不是有界的，这就使我们遇到了困难。例如，若 (3.16) 成立，则对每一个 $t>0$，取 $x=t+\frac{1}{2}\delta$，因此

$$\left(2t+\frac{1}{2}\delta\right)\frac{\delta}{2}<\varepsilon,\quad t>0.$$

这样将得出 $\delta=0$，这是行不通的。

把一致连续的条件改用下面的方法来叙述，有时对我们更为方便。假如有定义在非空域 D 上的函数 F，对每一正数 η，定义

$$\omega(F,\eta)=\sup\{|F(x)-F(t)|;x,t\in D,\ |x-t|\leqslant\eta\}.$$

函数 ω 称为 F 的**连续模**(不论 F 是否连续)。对每一个 η 显然有

$$0\leqslant\omega(F,\eta)\leqslant\infty.$$

通俗地说，当 F 的定义域中任意两点相距不超过 η 时，$\omega(F,\eta)$ 的值可用来测量 F 相隔开的程度。函数 F 是一致连续的当且仅当

$$\lim_{\eta\to0}\omega(F,\eta)=0. \tag{3.17}$$

例如，若 F 一致连续而 $\varepsilon>0$，则存在 $\delta>0$，使得当 x，$t\in D$，$|x-t|<\delta$ 时

$$|F(x)-F(t)|<\varepsilon.$$

因此，对一切 $\eta<\delta$，我们有 $\omega(F,\eta)\leqslant\varepsilon$。反之，若 (3.17) 成立，则 F 是一致连续的，这是容易证明的。

以下定理为我们提供了许多连续但不一致连续函数的例子。子序列定理更直接些。

定理 11 设 F 一致连续且定义域 D 有紧闭包（即 D 是有界

的)，则F是有界函数。

证明 取$\varepsilon=5$，应用一致连续的定义，必存在δ，使得

$$|F(x_1)-F(x_2)|<5, \quad x_j\in D, \quad |x_1-x_2|<\delta.$$

当x在D上变化时，开球族$B(x;\delta)$是$\bar{D}$的开覆盖。于是在D中存在点$x_1, \cdots, x_n$使球$B(x_j;\delta)$覆盖$\bar{D}$。特别，若$x\in D$，则x必和点$x_1, \cdots, x_n$中的某一点相距小于δ，因而对这样的δ和某一个j，有

$$|F(x)-F(x_j)|<5.$$

取

$$M=\max_j(|F(x_j)|+5),$$

显然$|F|\leqslant M$。

简单地说一下另一种证明。假如F不是有界的。在D中选择点x_n，使

$$\lim|F(x_n)|=\infty. \tag{3.18}$$

$\{x_n\}$的某一子序列在R^k中收敛，但极限点不一定在D中，当然这是次要问题。在某一项后，子序列的一切点之间相距小于δ，于是，在某一项后，F的对应值小于5。而这和(3.18)相矛盾。

定理 12 设F是连续函数，F的定义域是紧的，则F一致连续。

证明 设$\varepsilon>0$，$x\in D$。由于F在x连续，故而存在数$\delta_x>0$，使得

$$|F(y)-F(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon, \quad y\in D, \quad |y-x|<\delta_x.$$

令$U_x=B\left(x;\frac{1}{2}\delta_x\right)$。则$\{U_x; x\in D\}$是$D$的开覆盖。因为$D$是紧集，故在$D$中存在点$x_1, \cdots, x_n$，使这些集$U_{x_j}$覆盖$D$。这样，若$x\in D$，存在$j$，$1\leqslant j\leqslant n$，使

(3.19) $$|x-x_j|<\frac{1}{2}\delta_{x_j}.$$

令

$$\delta=\min_j\frac{1}{2}\delta_{x_j}.$$

现在，若 x 和 y 是 D 中任意两点，使得 $|x-y|<\delta$。选择一个足标 j，使(3.19)成立，则

$$|y-x_j|\leqslant|y-x|+|x-x_j|<\delta+\frac{1}{2}\delta_{x_j}\leqslant\delta_{x_j}.$$

根据(3.19)

$$|F(y)-F(x_j)|<\frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$|F(x)-F(x_j)|<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

因此，对 D 中任意两点，只要它们相隔小于 δ，就有

$$|F(x)-F(y)|<\varepsilon.$$

这样，就证得 F 是一致连续的。

定理 12 的证明是不平凡的，这是一个十分重要的定理，应彻底掌握它的证法。这里再介绍另一证法：设 $\varepsilon>0$，我们不能找到这样的 δ，则对每一个 n，可找到 D 中点 x_n，y_n，并且

$$|x_n-y_n|<\frac{1}{n}\quad 和\quad |F(x_n)-F(y_n)|\geqslant\varepsilon.$$

由于 D 是紧集，在 D 中存在序列 $\{x_n\}$ 的聚点 x，而 F 在 x 点连续。所以存在 $\alpha>0$，使得

$$|F(y)-F(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon,\quad |y-x|<\alpha.$$

选择某一 $n>2/\alpha$，使得

$$|x-x_n|<\frac{\alpha}{2}.$$

因此有

$$|F(x_n)-F(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$|F(y_n)-F(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$|F(y_n)-F(x_n)|\geqslant\varepsilon?$$

在介绍几个具体例子以前，我们先把定理 11 和定理 12 联系在一起研究。以下结果将使定理 11 更加明白。

定理 13 设 F 是 D 上一致连续函数，则 F 可以扩张成 D 的闭包上的连续函数，也就是存在函数 $\bar{F}$

$$\bar{D}\xrightarrow{\bar{F}}R^m,$$

使得

(a) $\bar{F}$ 是连续的；

(b) 对 D 中每一点 x，$\bar{F}(x)=F(x)$。

扩张 $\bar{F}$ 是唯一的，而且 $\bar{F}$ 一致连续。

证明 显然，这样的扩张不能多于一个：假如 $\bar{F}$ 满足(a)和(b)。设 x 是 $\bar{D}$ 中任一点，则在 D 中存在序列 $\{x_n\}$，它收敛于 x。由于 $\bar{F}$ 连续，

$$\bar{F}(x)=\lim_n \bar{F}(x_n)=\lim_n F(x_n).$$

这就说明 $\bar{F}(x)$ 由 F 唯一决定。

但是，为什么存在这样的扩张呢？根据上段的启发，我们定义 $\bar{F}$ 如下：设 $x\in\bar{D}$，在 D 中选一个序列 $\{x_n\}$，它收敛于 x。我们将要证明序列 $\{F(x_n)\}$ 收敛，从而可以定义

$$\bar{F}(x)=\lim_n F(x_n). \tag{3.20}$$

由于 F 是连续的，对 $x\in D$，有 $\bar{F}(x)=F(x)$。最后只要证 $\bar{F}$ 一致连续即可。

注意这样的事实：设 $\{x_n\}$ 是 D 中 Cauchy 序列，利用 F 的一致连续性，可以证明 $\{F(x_n)\}$ 是 Cauchy 序列，我们把这一证明留作

习题。假如我们证明了关于Cauchy序列的事实，那末，$\overline{F}$的存在性和一致连续性就可以这样进行：

(i) 任选$x\in\overline{D}$，设$\{x_n\}$是D中序列，它收敛于x。则$\{x_n\}$是Cauchy序列，所以$\{F(x_n)\}$是R^m中Cauchy序列，并且收敛于R^m中一点。定义$\overline{F}(x)$是$F(x_n)$的极限，对于x在D中的情形，由于F在x连续，所以$\overline{F}(x)=F(x)$。

(ii) 设$\varepsilon>0$。选择$\delta>0$，使得

$$|F(x)-F(y)|<\varepsilon,\quad x,\ y\in D,\ |x-y|<\delta. \tag{3.21}$$

设x, y是$\overline{D}$中的点，在D中存在我们用来定义$\overline{F}(x)$的对应序列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$，假如$|x-y|<\delta$(3.21)，则

$$|x_n-y_n|<\delta,\quad n>N.$$

于是，由(3.21)可得

$$|F(x_n)-F(y_n)|<\varepsilon,\quad n>N.$$

根据(3.20)

$$|\overline{F}(x)-\overline{F}(y)|\leqslant\varepsilon.$$

所以，$\overline{F}$一致连续。

注意，扩张的唯一性告诉我们，在(i)中定义的向量$\overline{F}(x)$不依赖于我们所使用的特殊序列$\{x_n\}$。在(ii)中令$x=y$也可得出$\overline{F}(x)$与$\{x_n\}$的选取无关的结论。

例20 考察区间(0, 1)上的三个函数：

$$f(x)=\frac{1}{x},\qquad 0<x<1,$$

$$g(x)=\sin\frac{1}{x},\qquad 0<x<1,$$

$$h(x)=x^2\sin\frac{1}{x},\quad 0<x<1.$$

它们每一个都是连续函数。函数f不一致连续，这可用几种方法来证明。例如，(0, 1)是有界的，而f不是有界的。函数g是有

界的，但 g 不是一致连续的，因为 g 在 0 点没有极限，从而不能把 g 扩张成闭区间 [0, 1] 上的连续函数。函数 h 是一致连续的，因为

$$\lim_{x\to 0} h(x) = 0 \text{ 和 } \lim_{x\to 1} h(x) = \sin 1,$$

所以，$h(x)$ 可连续扩张到 [0, 1]。

例 21 设 f_1，g_1，h_1 是用例 20 中的公式所定义的 $(0, \infty)$ 上的函数。因为 f，g 不一致连续，故 f_1，g_1 也不一致连续。h_1 怎样呢？可以把 h_1 连续地扩张到区域的闭包上，也就是扩张到 $[0, \infty)$ 上；然而，由于 $[0, \infty)$ 不是紧集，因此不能保证 h_1 是一致连续的。因为

$$\lim_{x\to\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

所以

$$\lim_{x\to\infty} h_1(x) = \infty.$$

于是对大的 x，$h_1(x)$ 的情况如同 x 一样。没有函数（除常数外）比“x”更一致连续：当 $|x-t|<\varepsilon$ 时，

$$|x-t|<\varepsilon.$$

因而，看起来 h_1 好象是（无界）一致连续函数，对这种情况，我们不仔细讨论了。

例 22 设 T

$$R^n \xrightarrow{T} R^m$$

是线性变换：$T(cx_1+x_2)=cT(x_1)+T(x_2)$。从例 7 可看出，每一线性变换是一致连续的，这是容易证的。令 $\varepsilon>0$。因为 T 在原点连续，必存在 $\delta>0$ 使得

(3.22) $$|T(x)|<\varepsilon,\quad |x|<\delta.$$

（注意，$T(0)=0$。）同一个 δ 可用于任一其它点 x_0，为什么？因为 T 是线性的，

(3.23) $$T(x)-T(x_0)=T(x-x_0),$$

从(3.22)可得

$$|T(x)-T(x_0)|<\varepsilon,\quad |x-x_0|<\delta.$$

设T是线性变换，y_0是R^m中一个固定向量，用同样的理由可建立**仿射变换**：

$$A(x)=y_0+T(x)$$

的一致连续性。

对线性变换，有一种简明的方法去描写一致连续性。假如对某一个ε，象(3.22)那样决定了δ，设x是R^k中任一非零向量，则

$$\left|\frac{\delta}{|x|}x\right|=\delta.$$

所以

$$\left|T\left(\frac{\delta}{|x|}x\right)\right|\leqslant\varepsilon,$$

$$\frac{\delta}{|x|}|T(x)|\leqslant\varepsilon,$$

$$|T(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{\delta}|x|.$$

也就是$T(x)$的长度受x的长度控制，其控制因子不超过$\frac{\varepsilon}{\delta}$。$T$的**范数**定义为

(3.24) $$\|T\|=\sup_{x\neq 0}\frac{|T(x)|}{|x|}=\sup\{|T(x)|;|x|=1\}.$$

因此有

(3.25) $$|T(x)|\leqslant\|T\||x|,\quad x\in R^k.$$

并且$\|T\|$是使(3.25)成立的最小正数。用δ-ε来描述就是：

$$|T(x)|<\varepsilon,\quad |x|<\frac{\varepsilon}{\|T\|}.$$

例23 设$t>0$。对$x\in R$，如何定义t^x呢？这是容易的：

$$t^x = \exp(x \ln t).$$

让我们用下面的方法来作些说明。在有了正数的 n 次根以后，当 x 是有理数时，容易定义 t^x 为：

$$t^{m/n} = (t^{1/n})^m.$$

于是对有理数 b, a

$$t^{a+b} = t^a t^b,$$

$$t^{ab} = (t^a)^b.$$

容易验证

$$\lim_{x \to 0} t^x = 1.$$

因为 x 只是有理数，故有

(3.26) $$\lim_{x \to 0} f(x) = 1,$$

式中

$$f(x) = t^x, \quad x \in Q.$$

那末，f 在 Q 上是否一致连续呢？由

(3.27) $$f(b) - f(a) = t^b - t^a = t^b(1 - t^{a-b}).$$

因子 t^b 暗示 f 在 Q 上不是一致连续的，然而，从 (3.26) 和 (3.27) 可看出，在任一有界区间上显然是一致连续的。因此可以把 f 连续地扩张到充满整个区间，于是对一切实数 x，定义了 t^x。

例 24 设 K 是 Cantor 集(第 2 章例 15)。从 $[0, 1]$ 删去开区间 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$，再从两个留下来的区间中删去中间的 $\frac{1}{3}$ 区间，如此进行下去，就得到 K。设 D 是这些开区间的并集。在 D 上定义函数：

$$f = \frac{1}{2}, \qquad 在\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$f = \frac{1}{4}, \qquad 在\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right),$$

$$f=\frac{3}{4},\qquad 在\left(\frac{7}{9},\ \frac{8}{9}\right)$$

$$f=\frac{1}{8},\qquad 在\left(\frac{1}{27},\ \frac{2}{27}\right),$$

$$f=\frac{3}{8},\qquad 在\left(\frac{7}{27},\ \frac{8}{27}\right),$$

$$\vdots\qquad\qquad \vdots$$

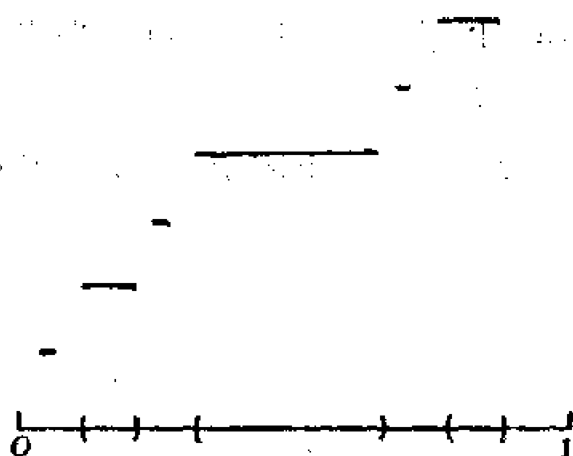


图 15

(图 15)显然

$$|f(x)-f(y)|<2^{-n},\quad 当\ |x-y|<3^{-n}.$$

于是，f 在 D 上是一致连续函数，并且 f 可连续扩张到 $\bar{D}=[0,\ 1]$。扩张后的 $\bar{f}$ 叫做 **Cantor 函数**。注意，Cantor 函数的图实际上是处处平坦的，但是 $\bar{f}(x)$ 却依然从 0 连续地变化到 1。

例 25 有一类性质很好的一致连续函数，它是由具有下列压缩性的函数 F 组成的：

$$|F(x)-F(y)|\leqslant|x-y|.$$

对这些函数，"我们常取 $\delta=\varepsilon$"。R^n 的**刚体运动**(或全等)就是一个这样的函数：

$$R^n\xrightarrow{T}R^n,$$

使得

(3.28) $$|T(x_1)-T(x_2)|=|x_1-x_2|.$$

Euclid 几何本质上是研究在刚体运动下集的不变性质。刚体运动的一个例子就是**平移**

$$T(x)=x_0+x.$$

另一个例子是**正交(线性)变换**:

(a) T是线性的;

(b) $\langle T(x_1), T(x_2)\rangle=\langle x_1, x_2\rangle$.

R^k 上的这种线性变换可以用 $k\times k$ 正交矩阵 A 来表示。也就是有 $T(x)=Ax$, 式中 $AA^t=I$.

定理 14 设 y_0 是 R^k 中的一个固定向量,T 是R^k 上的正交线性变换,则(仿射)变换

(3.29) $$S(x)=y_0+T(x),$$

是 R^k 的刚体运动。R^k 中任一刚体运动也一定可写成这种形式。

证明 我们已经觉察到,假如T是正交线性变换,则形如(3.29)的变换是刚体运动。反过来,必须验证,每一个刚体运动是一个正交变换加上一个平移。设 S 是 R^k 的任一刚体运动,令 $y_0=S(0)$, 并定义 T 为

$$T(x)=S(x)-y_0.$$

由于 S 保持距离,故 T 也保持距离,因此,T 是刚体运动并且$T(0)=0$。如果我们把"刚体性"

(3.30) $$|T(x_1)-T(x_2)|=|x_1-x_2|$$

用到 $x_2=0$ 的情形,并利用 $T(0)=0$, 就得到

(3.31) $$|T(x)|=|x|.$$

现在可以很容易地验证T保持内积,我们有

$$|x_1-x_2|^2=|x_1|^2+|x_2|^2-2\langle x_1, x_2\rangle,$$

$$|T(x_1)-T(x_2)|^2=|T(x_1)|^2+|T(x_2)|^2-2\langle T(x_1), T(x_2)\rangle,$$

利用(3.30)和(3.31)直接得到

$$\langle T(x_1),\ T(x_2)\rangle = \langle x_1,\ x_2\rangle.$$

能保持内积的变换必定是线性的。其余的证明留作习题。

系 R^k 的每一刚体运动将 R^k 映射到 R^k 上，并且它的逆映射是 R^k 的一个刚体运动。

证明 从 R^k 到 R^k 中的线性变换如果是一一对应的，则必定把 R^k 映射到 R^k 上。

习　　题

1. 设 F 是一致连续函数，$\{x_n\}$ 是 F 定义域中的一个 Cauchy 序列，则 $\{F(x_n)\}$ 是 Cauchy 序列。

2. 设 F 是从 R^k 到 R^m 的函数，如果对 $\varepsilon>0$，集 $\{x;\ |F(x)|\geqslant\varepsilon\}$ 是紧集，就称 F 在**无穷远处为零**。若 F 是连续的并且在无穷远处为零，则 F 是一致连续的。

3. 映射 $F=(f_1,\ \cdots,\ f_m)$ 是一致连续的当且仅当每一个 f_i 是一致连续的，这结论正确吗？

4. 连续函数 F 是一致连续的当且仅当 F 在它定义域的每一聚点有极限。这论断正确吗？

5. 若 f 是实直线上的一致连续函数，则差商

$$\frac{f(x)-f(t)}{x-t},\quad x\neq t,$$

是有界的。这论断正确吗？

6. 设 F 是一致连续函数

$$D\xrightarrow{F}R^m,$$

又设 $\bar{F}$ 是 F 在 $\bar{D}$ 上的扩张，$\bar{F}$ 的图象是 F 图象的闭包吗？

7. 设 f 和 g 是 D 上的有界一致连续函数，则 fg 也一致连续吗？

8.* 设 f 是 R 上一致连续函数，$g(x,\ y)=f(x)-f(y)$，$g(x,\ y)$ 是 R^2 上的一致连续函数吗？

9. 若

$$D\xrightarrow{F}R^m,$$

是一致连续的，并且 $S\cap D$ 是有界的，则 $F(S)$ 是有界的，这结论正确吗？

10．设 T 是从 R^k 到 R^m 的线性变换。$e_1, \cdots, e_k$ 是 R^k 的标准基，令

$$T(e_j)=(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}), \quad 1\leqslant j\leqslant k.$$

$m\times k$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$ 是 T 的**标准表示矩阵**，它完全由 T 所决定。设 $y=T(x)$，则

$$y^t=Ax^t,$$

式中 x^t 是 x 的转置：

$$x^t=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}, \cdots$$

请验证这一事实，并进而验证：T 是从 R^k 到 R^k 的正交变换当且仅当 A 为正交矩阵。（更自然的做法是，设 A^t 是表示矩阵，则 $y=T(x)$ 就是 $y=xA$；但是通常是把函数写在左边，所以我们才用另一方法写。）

11．根据例 22 中关于线性变换的范数定义，证明从 R^k 到 R^k 中的线性变换具有以下性质：

(a) $\|T_1\circ T_2\|\leqslant\|T_1\|\|T_2\|$.

(b) $\|T\|\leqslant|A|$，式中 A 是标准表示矩阵(习题 10)。

(c) 举出 $\|T\|<|A|$ 的例子.

(d) 若 $\|T\|<1$，则 $I-T$ 是可逆的.

(可回忆一下第 2 章例 9 的关系式。)

12．设 T 是从 R^k 到 R^k 的线性变换.

(a) T 为正交变换当且仅当标准表示矩阵 A 为正交矩阵.

(b) T 是正交变换当且仅当 T 是可逆的，并且

$$\|T\|=\|T^{-1}\|=1.$$

13．证明从 R^k 到 R^k 的任一保持内积不变的变换必是线性变换.

14．设 T 是从 R^k 到 R^m 的可加函数：

$$T(x_1+x_2)=T(x_1)+T(x_2).$$

假定在 R^k 中存在原点的某一邻域，在这个邻域上，T 是有界函数。证明 T 是线性变换.

第4章 微积分续论

4.1 区间上的微分法

本章所讨论的内容可以说是微积分的精华。由于它没有涉及微积分在科技领域的应用，因而是不全面的。本章着重介绍基本的概念和定理，其中有些已超出通常打基础的微积分课程的水平。

定义 设 I 是实直线上的区间，F 是 I 到 R^m 中的函数，x 是 I 中一点，如果极限

(4.1) $$\lim_{t\to x}\frac{F(t)-F(x)}{t-x}$$

存在，就称 **F 在 x 点可微**。如果 F 在 x 点可微，极限(4.1)就叫做 **F 在 x 点的导数**，并记作 $F'(x)$ 或 $(DF)(x)$。如果 F 在 I 的每一点可微，F 就叫做**可微的**。

设 F 是从 I 到 R^m 的任一函数，并且固定一点 $x\in I$，差商

$$\frac{F(t)-F(x)}{t-x}$$

是定义在一切点 $t\in I$，$t\neq x$ 上的函数。因此可以讨论极限 (4.1) 是否存在。若 F 和 G 都是从 I 到 R^m 的函数，它们在 x 点可微，由极限的相应性质可得出，$F+G$ 在 x 可微，并且

(4.2) $$(F+G)'(x)=F'(x)+G'(x);$$

若 F 和 G 是(复)矩阵值函数，则 FG 在 x 点可微，并且

(4.3) $$(FG)'(x)=F(x)G'(x)+F'(x)G(x).$$

这一乘法规则(4.3) 可以从 FG 的差商中加上一项再减去同一项

推出：

$$\frac{(FG)(t)-(FG)(x)}{t-x}=\frac{F(t)G(t)-F(x)G(x)}{t-x}$$

$$=F(t)\cdot\frac{G(t)-G(x)}{t-x}$$

$$+\frac{F(t)-F(x)}{t-x}G(x).$$

当 t 趋向于 x 时，$F(t)$ 趋向于 $F(x)$，差商分别趋向于 $G'(x)$ 和 $F'(x)$。由和、积的极限法则就可得到所需结论。

在上段中我们利用了这样的事实：若 F 在 x 可微，则

$$\lim_{t\to x}[F(t)-F(x)]=0.$$

这是很明显的，因为在(4.1)中，差商的分母趋于 0，要使商有极限，只有分子也趋向于 0 才有可能。这就是说，在 x 点的可微性可以推出在 x 点的连续性。但是反过来是不正确的，只要研究一下例子 $f(x)=|x|$ 在点 0 的情况即可明白。

若 F 在 I 的每一点可微，则 $DF=F'$ 是 I 上的函数，称为 F 的**导数**。于是又可以问 DF 是否可微。如果 DF 是可微的，用 D^2F 或 F'' 来记 DF 的导数。逐次导数（如果它们存在）用 $F^{(n)}=D^nF$ 来记。所谓 C^k **类**的函数 F 是指 k 次导数 D^kF 存在且连续的函数。如果 F 有各阶导数，则 F 属于 C^∞ **类**。

若 I 是半闭区间，则在闭的一端，导数仅指单侧导数。如 $I=[a,b)$ 的端点 a，仅指从右面趋向于 a。对区间的内点讨论左导数和右导数也是有用处的，下面我们简单地讨论一下。

设 F 定义在 x 的邻域内，考虑差商

$$\frac{F(x)-F(t)}{x-t},\quad x<t<x+\delta.$$

如果差商在 x 有极限，就称此极限是 F 在 x 的**右导数**：

$$(4.4)\qquad (D^+F)(x)=\lim_{t\to x^+}\frac{F(x)-F(t)}{x-t}.$$

类似地可定义 F 在 x 的**左导数**(如果它存在)：

$$(4.5)\qquad (D^-F)(x)=\lim_{t\to x^-}\frac{F(x)-F(t)}{x-t}.$$

两个单侧导数都可能不存在。也可能两个单侧导数都存在，但不相等，例如，$f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 就是这一情况。显然，$(DF)(x)$ 是存在的充要条件是 $(D^+F)(x)$ 和 $(D^-F)(x)$ 都存在，并且 $(D^+F)(x)=(D^-F)(x)$。

对于映射

$$I\xrightarrow{F}R^m,$$

它由 m 个实值函数所描述，$F=(f_1,\cdots,f_m)$。从极限的相应性质，当每一个 f_i 在 x 可微时，F 在 x 也可微。这时，$F'(x)=(f_1'(x),\cdots,f_m'(x))$。因此，讨论微分法只要对实值函数进行即可；然而，这样的做法并不聪明，更好的办法是不用坐标，而用向量值函数的微分法。

现在似乎是讨论实值函数微分法特色的适当时候了。设 f 是可微函数，则 $f'(x)$ 是 f 的图象在点 $(x, f(x))$ 处切线的斜率，它从数量上刻画了 f 在 x 处增加的速度。于是，对 f 有极大值或极小值的点，图形的切线是水平的。这一简单的考察有一些重要的推论。

定理 1 设 f 是区间 (a,b) 上的实值函数，$x\in(a,b)$，并设

(i) 在 x 处，f 有局部极大值(或局部极小值)，

(ii) f 在 x 点可微，

则 $f'(x)=0$。

证明 f 在 x 有局部极大值意味着存在 $\delta>0$，使得

$$(4.6)\qquad f(t)\leqslant f(x),\ |x-t|<\delta.$$

从(4.6)可知，若 $(D^+f)(x)$ 存在，则显然有 $(D^+f)(x)\leqslant 0$。类似地，若 $(D^-f)(x)$ 存在，则 $(D^-f)(x)\geqslant 0$。因此，若它们同时存在且相等时，它们的公共值必须是零。

系(中值定理) 设 f 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可微，则存在 $x\in(a, b)$，使

$$
(4.7) \qquad f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.
$$

证明 令

$$
g(x)=f(b)-f(x)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b),
$$

则 g 象 f 一样满足同样的条件，并且 $g(a)=g(b)=0$。连续函数 g 在 $[a, b]$ 上达到它的极大值和极小值，这些点中有一个必在开区间 (a, b) 中，于是 $g'(x)=0$，这就得到了(4.7)。

系 设 f 在 (a, b) 上可微，则 f 是增函数的充要条件是 $f'\geqslant 0$；f 是常数的充要条件是 $f'=0$。

证明 对导数用中值定理即可证得。

系(链规则) 设 F，g 是可微函数，且 g 的象包含在 F 的定义域中：

$$
(a, b)\xrightarrow{g}(c, d)\xrightarrow{F}R^m,
$$

则复合 $F\circ g$ 是可微的，并且 $(F\circ g)'=g'(F'\circ g)$，也就是说，$(F\circ g)'(x)=g'(x)F'(g(x))$。

证明 固定 $x\in(a, b)$，从导数的定义

$$
\begin{aligned}
F(y)-F(g(x))=&[y-g(x)]F'(g(x))\\
&+(y-g(x))R(y, g(x))
\end{aligned}
$$

式中

$$
\lim_{y\to g(x)} R(y, g(x))=0.
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{F(g(t))-F(g(x))}{t-x}-\frac{g(t)-g(x)}{t-x}F'(g(x))\right|\\
&\qquad\leqslant\left|\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right|\left|R(g(t)), g(x))\right|.
\end{aligned}
$$

系 设 g 是区间 (a, b) 上的可微实值函数，且对每一 $x\in(a, b)$，$g'(x)\neq 0$，则 g 是一一的，且反函数 g^{-1} 是可微的，同时

$$(Dg^{-1})(g(x))=\frac{1}{g'(x)}.$$

证明 如果 $x\neq t$ 时有 $g(x)=g(t)$，由中值定理可得到一点 c，c 在 x 和 t 之间，并且 $g'(c)=0$。因此 g 是一一的，也就是 g 或者是严格增加的，或者是严格减少的。正如第3章（定理9）所讨论的，这意味着 (a, b) 的象是开区间，且 g^{-1} 是连续的。于是，

$$(Dg^{-1})(g(x))=\lim_{u\to g(x)}\frac{g^{-1}(u)-g^{-1}(g(x))}{u-g(x)}$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{t-x}{g(t)-g(x)}=\frac{1}{g'(x)}.$$

例1 设 A 是 $k\times k$ 复矩阵。令

$$F(t)=e^{tA},\quad t\in R,$$

则 F 是可微函数。我们有

$$\frac{F(t)-F(x)}{t-x}=\frac{e^{tA}-e^{xA}}{t-x}=\frac{e^{(t-x)A}-I}{t-x}\cdot e^{xA}.$$

我们需要研究

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{tA}-I}{t}.$$

现在

$$e^{tA}-I=\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{n!}t^nA^n,$$

所以

$$t^{-1}(e^{tA}-I)-A=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}t^{n-1}A^n,$$

$$|t^{-1}(e^{tA}-I)-A|\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}|t|^{n-1}|A|^n$$

$$\leqslant\frac{|A|}{2}\cdot\frac{|t||A|}{1-|t||A|}.$$

因此 F 是可微的，而且

(4.8) $$F'(x) = Ae^{xA} = AF(x).$$

因为 $F' = AF$，所以 F 是 C^∞ 类函数。

注意，(4.8) 中的微分方程决定了指数函数。设 G 是从 R 到 $C^{k\times k}$ 中的可微函数，并设

$$G'(x) = AG(x),$$

其中 A 是某一固定矩阵，则 $e^{-xA}G(x)$ 的导数为 0，于是

$$G(x) = e^{xA}B,$$

式中 $B = G(0)$。注意，若 $G(x) = Be^{xA}$，为了使得 $G' = AG$ 成立，必须 B 和 A 是可交换的，即 $AB = BA$。

当然，最重要的特别情形是实值函数

$$f(t) = e^t, \quad t \in R,$$

它满足 $f' = f$。由于 $f'(t) \neq 0$，最后的系告诉我们 f 的反函数 f^{-1} 存在，记它为 ln，它满足

$$(D\ln)(e^t) = e^{-t} \quad 或 \quad (D\ln)(x) = \frac{1}{x}.$$

例 2 设 F 是实直线上的复值函数：$F(x) = e^{ix}$。根据例 1，它是 C^∞ 类函数，并且 $F^{(n)}(x) = i^n F(x)$。注意，如果我们不知道什么是正弦函数和余弦函数，就可以这样来定义：

$$\begin{aligned}
\sin x &= \operatorname{Im}(F(x)) \\
&= \operatorname{Im} \sum_0^\infty \frac{1}{n!}(ix)^n \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos x &= \operatorname{Re}(F(x)) \\
&= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(ix)^n
\end{aligned}$$

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.$$

这些函数都是 C^∞ 类的，并且

$$D(\cos)=-\sin,$$

$$D(\sin)=\cos.$$

它们每一个函数都满足微分方程

$$f''+f=0. \tag{4.9}$$

进一步，区间上任一个适合 (4.9) 的函数是 sin 和 cos 的线性组合。这一证明对学数学的学生是十分熟悉的。为方便起见，设 f 是实值的且(4.9)在 0 的一个邻域中成立。令

$$g(x)=f(x)-f(0)\cos x-f'(0)\sin x,$$

则 $g''+g=0$，且 $g(0)=g'(0)=0$。于是

$$g'g''+gg'=0,$$

$$D((g')^2+g^2)=0,$$

$$(g')^2+g^2=\text{常数}.$$

由于 $g(0)=g'(0)=0$，此常数是 0；所以

$$(g')^2+g^2=0,$$

$$g'=g=0 \quad (\text{由于 } g \text{ 是实值的}),$$

$$f(x)=f(0)\cos x+f'(0)\sin x.$$

例 3 设 f 是区间上的实值函数，如果对这一区间中的一切 x，u 和一切满足条件 $0\leqslant c\leqslant 1$ 的 c，成立

$$f[cx+(1-c)u]\leqslant cf(x)+(1-c)f(u), \tag{4.10}$$

则就称 f 是**凸函数**。这就是说，在 x 和 u 之间，f 的图形位于连接点 $(x, f(x))$ 到点 $(u, f(u))$ 的直线的下方(见图 16)。于是，$f(x)=x^2$，$f(x)=e^x$ 是实直线上的凸函数，$f(x)=\sin x$ 是区间 $[-\pi, 0]$

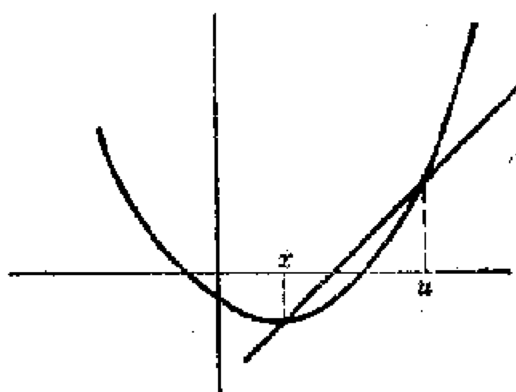


图 16

上的凸函数。

定义中的性质 (4.10) 可以改写为另一有用的形式。考察 $x<t<u$，于是 $t=cx+(1-c)u$，式中

$$c=\frac{u-t}{u-x}.$$

条件(4.10)就成为

$$f(t)\leqslant\frac{u-t}{u-x}f(x)+\frac{t-x}{u-x}f(u),$$

上式可方便地表达成

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\leqslant\frac{f(u)-f(x)}{u-x}.$$

换句话说，若 $x<t<u$，连接 $(x, f(x))$ 到 $(u, f(u))$ 的弦的斜率至少大于从 $(x, f(x))$ 到 $(t, f(t))$ 的弦的斜率。因此，由光滑函数的凸性得到：导数 f' 是增(非减)函数。这一证明留作习题。

事实上，单凭凸性就可推出在许多点上 f 有导数，并且 f' 是一个增函数。我们概述一下证明。设 $x<t<u$，则

$$\frac{f(u)-f(x)}{u-x}\geqslant\frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

因此，除了 x 是定义区间的右端点外，右导数 $(D^+f)(x)$ 存在，并且

$$(D^+f)(x)=\inf_{t>x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

类似地，除了 x 是区间的左端点外，左导数存在，并且

$$(D^- f)(x) = \sup_{t<x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

对 $(D^+f)(x)$ 和 $(D^-f)(x)$ 都存在的点，f 是连续的，进一步可证明

$$(D^+f)(t) \geqslant (D^-f)(t) \geqslant (D^+f)(x) \geqslant (D^-f)(x), \quad t>x.$$

所以，左导数 D^-f（以及右导数 D^+f）是增函数。对 f 不可微的点，$(D^+f)(x)>(D^-f)(x)$，所以 D^-f 有一个跳跃。但在区间 $[a, b]$ 上，所有这些跳跃的和不会超过 $(D^-f)(b)-(D^+f)(a)$。因此只能有可列个跳跃。结论是：在开区间上凸函数 f 是连续的；除了可列个点外，f 是可微的；并且导数 Df（在它有定义的地方）是一个增函数。

习　题

1. 设 F 在点 x 可微，在 x 点附近，用仿射函数

$$A(t)=F(x)+(t-x)F'(x)$$

来逼近 $F(t)$。证明这一逼近满足：

$$\lim_{t\to x} \frac{F(t)-A(t)}{t-x}=0.$$

2. 设 F 定义在包含 x 的开区间上。证明：若 $(D^+f)(x)$ 和 $(D^-f)(x)$ 都存在，则 F 在 x 连续。

3. 令

$$f_n(x)=\begin{cases} x^n \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

证明 f_1 连续但在 0 点不可微，f_2 可微但不属于 C^1 类。请问，关于 f_n 有什么相应的结论呢？

4. 设 $f_n(x)=x^n|x|$，$n=0, 1, 2, \cdots$。计算 f_n' 并找出最大的整数 k，使 f_n 是 C^k 类函数。

5. 设 F 是从区间 I 到 R^m 中的可微函数，$F'=0$，证明 F 是常数。

6. 设 f 是实直线上的实值函数

$$f(x)=\exp(-x^{-2}),\ x\neq 0,$$
$$f(0)=0.$$
证明 f 是 C^∞ 类函数，并且对每一个 n，$f^{(n)}(0)=0$。

7. 设 f 是区间上的复值函数，$f+f''=0$；令 $g=f-if'$，$h=f+if'$，利用 $g'=ig$，$h'=-ih$ 的事实求出 f 的形式。

8. 设 f，g 是 R 上的可微函数，且

$$f^2+g^2=1,$$
$$Df=g,$$
$$Dg=-f,$$
$$f(0)=0,$$
$$g(0)=1.$$

想一想，f，g 是什么，并证明它。

9. 设 f 是 $[0,1]$ 上的 Cantor 函数（参见第 3 章例 24）。证明对不属于 Cantor 集的每一点，f 的导数存在，其值为 0。而对 Cantor 集内的点，f 不可微。

10. 证明实直线上的指数函数是凸函数，因此对一切实数 x 和 t，成立

$$e^x\geqslant e^t(1+x-t).$$

11. 设 f 是区间 I 上的实连续函数，它在 I 的每一内点可微。证明 f 是凸的充要条件是导数 f' 是增(非减)函数(在课文中已证明了必要性)。能由此得出 C^2 类凸函数的形式吗？

12. 若 f 和 g 是凸函数，$\max(f,g)$ 是凸函数吗？对于 $\min(f,g)$ 又怎样呢？

13. 设 f 是区间上的实函数，则下列条件等价：

(a) f 是凸的。

(b) 对每一 x，通过点 $(x,f(x))$ 有一条直线，使 f 的图形位于线的上方。

(c) R^2 中位于 f 的图形上面的一切点所成之集是凸集。

(d) f 是连续的，并且

$$f\left(\frac{x+t}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(x)+f(t)].$$

14. 设 f 是实直线上的复值连续函数，它满足函数方程

$$f(x+t)=f(x)f(t).$$

若 $f\neq 0$，证明存在复数 a，使 $f(t)=e^{at}$（可以先讨论 $\ln|f|$ 是哪类函数）。

15. 在习题 14 中换成矩阵值函数又将如何?

16. 设 F 是实直线上的可微函数，$|F'|\leqslant|F|$，并且 $F(0)=0$，证明 $F=0$。

17. 我们已知道如何去求解微分方程 $f'(x)=ax$。设有 k 个未知函数 f_i 和 k^2 个已知常数 a_{ij} 的微分方程组：

$$f_1'=a_{11}f_1+\cdots+a_{1k}f_k$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$f_k'=a_{k1}f_1+\cdots+a_{kk}f_k.$$

把方程组改写为

$$F'=AF,$$

式中 A 是常数矩阵，而

$$F=\begin{bmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_k \end{bmatrix}.$$

证明 F 的任一解可表达成 $F(t)=e^{tA}X_0$，其中 X_0 是某一常数列矩阵。

4.2 区间上的积分

设 F 是闭区间 $I=[a, b]$ 上的连续函数，我们要定义并讨论 F 在 I 上的积分：

$$\int_I F=\int_a^b F(x)dx.$$

当 F 是非负(连续)实值函数时，积分是一个数，它表示在 F 的图形下的面积。用熟知步骤所定义的积分给出了近似求面积的系统方法。

自从 300 年以前 Newton 和 Leibnitz 首次系统地引进这些概念以来，积分应用的领域已极为广泛。其部分原因可能是由于积分的近代定义，这一定义与它的任一特殊应用无关，积分过程是用精确的分析语言描述的。本章将使用由 Riemann 给出的但已

作了修改的说法。第7章将讨论 Lebesgue 给出的积分概念。由于在 Lebesgue 的意义下有更多的函数可积，所以，Lebesgue 积分比 Riemann 积分含义更广泛。但在这里，我们的主要目标是理解微积分的基本定理，因此我们无需如此广泛。此外，对每一个学分析的学生来说，知道连续函数的 Riemann 积分过程是收敛的这件事倒是重要的。

为了介绍 Riemann 积分，引进两个术语。区间$[a, b]$的**划分**是任意插进如下的$n+1$个点：

(4.11)
$$P=(x_0, \cdots, x_n)$$
$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

这一划分把区间分成n个子区间，这些子区间长度的最大者叫做划分的**网眼**：

(4.12)
$$\|P\|=\max_k(x_k-x_{k-1}) \qquad (1\leqslant k\leqslant n).$$

设F是从区间$I=[a, b]$到R^m中的函数。F在I上的积分如果存在，将是下列和式的极限：

(4.13)
$$S(F, P, T)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})F(t_k),$$

式中

$$P=(x_0, \cdots, x_n),$$

是$[a, b]$的划分，并且

$$T=(t_1, \cdots, t_n), \quad t_k\in[x_{k-1}, x_k],$$

t_k是从划分的每一个子区间中选出的。这样的和常叫做"Riemann 和"，但我们将不使用这一术语。当划分的网眼趋于0时，这些和的"极限"可以不严格地说成是

$$\int_I F=\lim_{\|P\|\to 0}S(F, P, T).$$

有许多(不可数个)不同的划分P，并且对函数取值点T的选择也

有许多不同的做法，因此需要留意“极限”的含义。

对任一函数，要使它是可积的（从理论上说），应对于划分的任一序列 $\{P_n\}$，只要它的网眼趋向于 0，以及对应的任意选定的序列 $\{T_n\}$，都可以用来计算积分。任何两个这样的序列（$\{P_n\}$，$\{T_n\}$）产生一个向量的序列（近似和）

$$S_n = S(F,\ P_n,\ T_n),$$

它收敛于 F 的积分。例如，若

$$(4.14)\qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} F\left(\frac{k(b-a)}{n}\right),$$

则对每一个可积函数 F，将有

$$\lim_n S_n = \int_a^b F(x)\,dx.$$

看上去，序列 (4.14) 要比涉及到种种划分 P 和点 T 的选择的 (4.13) 简单。人们要问，为什么我们不使用 (4.14) 去定义积分呢？这有两个理由，一个来自实践，一个来自理论：

(i) 甚至对十分光滑的函数 F，特殊的序列 (4.14) 也不能提供最方便的方法去计算积分。我们希望用任何一个网眼趋于 0 的划分序列得到的和收敛于同一个极限。换句话说，我们希望使所选择的序列对每一个特殊的函数都是最方便的。

(ii) 我们还要处理不光滑函数的积分。因此，必须确切地了解可积函数类。我们将通过很简单的例子指出，在积分的定义中，如果仅仅利用特殊点序列上的函数值，例如点 $(k/n)(b-a)$ 上的函数值是不够的，这会引起混乱。

例 4 设 f 是实值函数，由下式所定义：

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \text{ 是有理数时,} \\ 1, & \text{当 } x \text{ 是无理数时.} \end{cases}$$

设 $a<b$，令 $P=(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 是 $[a,\ b]$ 任一划分。每一个区间 $[x_{k-1},\ x_k]$ 有正长度，且包含有理点和无理点。对每个 k，选一个有

理点 $t_k\in[x_{k-1}, x_k]$，再选一个无理点 $t'_k\in[x_{k-1}, x_k]$。根据 f 的定义，对每一个 k 应有 $f(t_k)=0$ 和 $f(t'_k)=1$，所以

$$S(F, P, T)=0,$$

$$S(F, P, T')=b-a.$$

因此，可以选择序列 (P_n, T_n)，$\|P_n\|\longrightarrow 0$，且 $S(F, P_n, T_n)=0$，而对同一个 P_n，选择另一序列 T'_n，使 $S(F, P_n, T'_n)=b-a$。在此情形，f 的积分应当是什么呢，为了避免这种混乱，我们应定义"可积"函数类，这样就可排除上述函数 f 了。

定义 设 F 是从区间 $[a, b]$ 到 R^m 中的函数。如果存在 R^m 中向量 S，具备下列性质：对每一 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对 $[a, b]$ 的任一划分 P，只要 $\|P\|\leqslant\delta$，以及对由 P 所定义的子区间中任选的点 T 有

$$|S-S(F, P, T)|<\varepsilon,$$

则称 F 是 **Riemann 可积**的。

虽然这一定义略显复杂，但它说明了一个简单的概念：所谓 F 是 Riemann 可积的，是指存在向量 S（它将是 F 的积分），当 $\|P\|\to 0$ 时，近似和 $S(F, P, T)$ 收敛于 S。在什么意义下收敛呢？在这样的意义下，即只要 $\|P\|$ 是小的，而对 P 的子区间中点 T 的选择是无条件的，那末 $S(F, P, T)$ 将收敛于 S。

上述基本定义可改述如下：函数 F 是 Riemann 可积的当（且仅当）存在 R^m 中向量 S，使对任一划分序列 P_n，$\|P_n\|\to 0$，以及对 P_n 所定义的子区间中任意选出的点 T_n 有

$$\lim_n S(F, P_n, T_n)=S.$$

所以，例 4 中的函数 f 不是 Riemann 可积的。

若 F 是 Riemann 可积的，定义中的向量 S 是唯一的。它叫做 **F 在区间 $I=[a, b]$ 上的积分**，并记作 $\int_I F$ 或 $\int_a^b F(x)dx$。

我们对这个记号再说一句。Leibnitz 所发明的关于导数和积分这极其有用的记号，给微积分带来了强大的生命力。对区间 $[a, b]$ 上的实值函数，积分可写成

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

其含义是：

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \lim_{\max|\Delta x_k|\to 0}\sum_k f(x_k)\Delta x_k \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\sum f(x)\Delta x.\end{aligned}$$

在向量值函数情形，我们没有使用 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ 的记号，因为若把和式中的每一项写成 $\Delta x_k F(x_k)$，那就会自然的写出：

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k F(x_k) = \int_a^b dx F(x),$$

而这可能隐伏着产生混乱的因素。

下面要直接证明各种已知函数(如连续函数) 是 Riemann 可积的。也就是要证明对各种已知函数来说，积分过程"收敛"。我们需要有一个类似于对序列的 Cauchy 准则那样的"收敛"准则，这一准则表面上不涉及到极限向量。

设 F 是从 $[a, b]$ 到 R^m 中的任一函数，对每一 $\delta>0$，定义集 $\Sigma_\delta = \Sigma_\delta(F)$ 如下：考虑区间 $[a, b]$ 的划分 $P = (x_0, \cdots, x_n)$，$\|P\|<\delta$，和一切可能的相应任选的 $T = (t_1, \cdots, t_n)$，$t_k \in [x_{k-1}, x_k]$，每一对 (P, T) 决定一个和

$$S(F, P, T) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})F(t_k),$$

$\Sigma_\delta(F)$ 定义为一切这种和的集：

$$(4.15)\qquad \Sigma_\delta(F) = \{S(F, P, T);\quad \|P\|\leqslant\delta,\quad t_k\in[x_{k-1}, x_k]\}.$$

如果 F 是 Riemann 可积的，则对小的 δ，$\|P\|<\delta$ 的一切和

$S(F, P, T)$，也就是 $\Sigma(F)$ 中的一切向量，它们都与 F 的积分值相接近。于是，当 δ 是小的，Σ_δ 应是一个具有小直径的集，这个集在 F 的积分附近。而用 Σ_δ 中向量逼近的积分一定在闭包 $\bar{\Sigma}_\delta$ 中。当 δ 减少时，集 Σ_δ 将如何变化呢？如果 $0<\eta<\delta$，从定义(4.15)直接得到 $\Sigma_\eta \subset \Sigma_\delta$，这是对任何 F 都正确的。对于任何一个可积的 F，当 δ 趋于 0 时，闭集 $\bar{\Sigma}_\delta$ 收缩为单个向量 $\int_I F$。换句话说，集 Σ_δ 的直径收敛于 0，并且 $\int_I F$ 是交

$$\bigcap_{\delta>0} \bar{\Sigma}_\delta$$

中的唯一向量。

定理 2 设 F 是从区间 $[a, b]$ 到 R^m 中的函数，用(4.15)定义集 $\Sigma_\delta(F)$，则 F 是 Riemann 可积的充要条件是

$$\lim_{\delta\to 0} \operatorname{diam} \Sigma_\delta = 0. \tag{4.16}$$

证明 只要证明充分性。设(4.16)成立，考虑集 Σ_δ 的闭包的交：

$$\bigcap_{\delta>0} \bar{\Sigma}_\delta$$

由直径的条件，在交中不能多于一点。然而，交不是空集。理由是：当 $\eta<\delta$ 时有 $\Sigma_\eta \subset \bar{\Sigma}_\delta$，因此闭集 $\bar{\Sigma}_\delta$ 组成一个闭集套：

$$\Sigma_\eta \subset \bar{\Sigma}_\delta, \quad \eta<\delta.$$

由于集的直径趋于 0，对充分小的 δ，它们是有界集。因此它们的交不是空集（见第 2 章定理 9）。设 S 是交中向量，若 $\varepsilon>0$，选择 $\delta>0$，使得 $\operatorname{diam} \Sigma_\delta(F)<\varepsilon$。若 P 是 $[a, b]$ 的任一划分，$\|P\|<\delta$，而 T 是在划分 P 下子区间中任意选取的点，则和 $S(F, P, T)$ 在集 $\Sigma_\delta(F)$ 中，并且向量 S 在 $\bar{\Sigma}_\delta(F)$ 中。由于 $\operatorname{diam} \Sigma_\delta(F)<\varepsilon$，

$$|S - S(F, P, T)| < \varepsilon,$$

所以 F 是 Riemann 可积的（并且 $S = \int_I F$）。

为了利用直径准则 (4.16) 去证明一个给定的函数 F 是 Rie-

mann 可积的，对给定的 δ，必须估计划分的网眼小于 δ 时的任意两个近似和之间的最大距离。为此，先要讨论从一个给定的划分到一个更精细的划分时发生的情况。

设 $P=(x_0, \cdots, x_n)$ 和 $Q=(y_0, \cdots, y_p)$ 是区间 $[a, b]$ 的划分。如果 $\{x_0, \cdots, x_n\}$ 是 $\{y_0, \cdots, y_p\}$ 的子集，就称 Q 是 P 的**加细**。这时，Q 是从 $x_0<x_1<\cdots<x_n$ 中再插入 $p-n$ 个点所得到的。若 Q 是 P 的加细，则 $\|Q\|\leqslant\|P\|$，但是这个条件比之 Q 的网眼小于 P 的网眼的条件更强。

引理 设 F 是从 $[a, b]$ 到 R^m 中的函数。$P=(x_0, \cdots, x_n)$ 和 $Q=(y_0, \cdots, y_p)$ 都是 $[a, b]$ 的划分，而 Q 是 P 的加细。若 T 是任选的点，$t_k\in[x_{k-1}, x_k]$，$k=1, \cdots, n$，则存在 $[a, b]$ 中的点 u_1，$\cdots$，u_p，使得

(i) $y_{j-1}-\|P\|\leqslant u_j\leqslant y_j+\|P\|, \quad j=1, \cdots, p;$

(ii) $\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})F(t_k)=\sum_{j}^{p}(y_j-y_{j-1})F(u_j)$。

证明 设 j 是一个足标，$1\leqslant j\leqslant p$。我们将要定义与 j 相对应的点 u_j。因为 Q 是 P 的加细，故在开区间 (y_{j-1}, y_j) 中没有点 x_i，因此闭区间 $[y_{j-1}, y_j]$ 一定完整地含在某一区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中。事实上，由于不同区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 之间内部并不重叠，因而仅仅只有一个足标 i，$1\leqslant i\leqslant n$，使得 $[y_{j-1}, y_j]\subset[x_{i-1}, x_i]$，这个指标用 $i(j)$ 来记并定义 $u_j=t_{i(j)}$。

现在考察

$$\sum_{j=1}^{p}(y_j-y_{j-1})F(u_j)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i(j)=k}(y_j-y_{j-1})F(u_j)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i(j)=k}(y_j-y_{j-1})F(t_k)。$$

对某一 k，使 $i(j)=k$ 的那些足标 j 有 $[y_{j-1}, y_j]\subset[x_{k-1}, x_k]$，由于 Q 是 P 的加细，这些区间组成 $[x_{k-1}, x_k]$ 的一个划分，也就有

$$\sum_{i(j)=k} (y_j - y_{j-1}) = x_k - x_{k-1}.$$

这就证明了引理。

定理 3 设 F 是从闭区间 $[a, b]$ 到 R^m 中的连续函数，则 F 是 Riemann 可积的。

证明 证明的思想是利用 F 的一致连续性去估计集 $\Sigma_\delta(F)$ 的直径。设 $\delta>0$，P 和 P' 是网眼不超过 δ 的两个划分，设 $T=(t_1, \cdots, t_n)$，$T'=(t'_1, \cdots, t'_{n'})$ 是分别从 P 和 P' 的子区间中选出的点，要估计从 $S(F, P, T)$ 到 $S(F, P', T')$ 的距离。为此，我们需要把它们改写为同一划分上的和。把点列 $x_0, \cdots, x_n, x'_0, \cdots, x'_{n'}$ 中的不相同的点重新排列成增加次序，所得到的划分记为 $Q=(y_0, \cdots, y_p)$，则 Q 是 P 的加细，也是 P' 的加细。根据引理，存在 $[a, b]$ 中点 $u_1, \cdots, u_p$ 和 $u'_1, \cdots, u'_p$，使得

$$S(F, P, T)=S(F, Q, U),$$

$$S(F, P', T')=S(F, Q, U').$$

我们并不能断定 u_j 和 u'_j 位于区间 $[y_{j-1}, y_j]$ 内。但根据引理可知 u_j 和 u'_j 位于区间 $[y_{j-1}-\delta, y_j+\delta]$ 内。于是

$$S(F, P, T)-S(F, P', T') = \sum_{1}^{p}(y_j-y_{j-1})\ [F(u_j)-F(u'_j)],$$

并且 $|u_j-u'_j|\leqslant 2\delta$，$j=1, \cdots, p$。令

$$M=\max_j |F(u_j)-F(u'_j)|,$$

就有

$$(4.17)\quad |S(F, P, T)-S(F, P', T')| \leqslant M\sum_{j=1}^{p}(y_j-y_{j-1}) = M(b-a).$$

现在要证明当 $\|P\|$ 和 $\|P'\|$ 是小的数时，M 也是小的数。由于 F 是闭区间上的连续函数，因而是一致连续的（第 3 章定理 12）。由一致连续性。当 δ 是小的时，因为 u_j，u'_j 相距小于 2δ，故每一个数

$|F(u_i)-F(u_i')|$ 是小的。确切地说，如果 ω 是 F 的连续模（见(3.17))：

$$\omega(F, \eta)=\sup_{|x-t|\leqslant\eta}|F(x)-F(t)|,$$

由(4.17)得出

$$|S(F, P, T)-S(F, P', T')|\leqslant(b-a)\omega(F, 2\delta).$$

于是，

$$\operatorname{diam}\Sigma_\delta(F)\leqslant(b-a)\omega(F, 2\delta).$$

由于 F 是一致连续的，故

$$\lim_{\eta\to0}\omega(F, \eta)=0,$$

从而 F Riemann 可积。

系 若 F 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数，$P=(x_0, \cdots, x_n)$ 是 $[a, b]$ 的划分，$T=(t_1, \cdots, t_n)$ 是任选的点，$t_k\in[x_{k-1}, x_k]$，ω 是 F 的连续模，则

$$\left|\int_a^b F(x)\,dx-\sum_{k=1}^n(x_k-x_{k-1})F(t_k)\right|\leqslant(b-a)\omega(F, 2\|P\|).$$

证明 令 $\delta=\|P\|$。为了证明定理要验证：

$$\operatorname{diam}\Sigma_\delta(F)\leqslant(b-a)\omega(F, 2\delta).$$

这是由于 F 的积分在 $\Sigma_\delta(F)$ 的闭包中，因而从和 $S(F, P, T)$ 到积分的距离不会超过 $(b-a)\omega(F, 2\delta)$。

习 题

1. 设 F 是闭区间 I 上的 Riemann 可积函数，c 是任一实数，证明 cF 是 Riemann 可积的，并且

$$\int_I cF=c\int_I F.$$

(直接用 $c\int F-S(cF, P, T)$ 来做，不必用 $\Sigma_\delta(cF)$ 做。)

2. 在上题中，若 F 是复值函数而 c 是复数，结论仍成立吗？(当然，应把复值函数看作到 R^2 中的映射。)

3. 设 F 和 G 是从闭区间 I 到 R^m 中的函数，F 和 G 都是 Riemann 可积的，证明 $F+G$ 也 Riemann 可积，并且

$$\int_I (F+G) = \int_I F + \int_I G.$$

4. 若 f 和 g 是闭区间 I 上的实值 Riemann 可积函数，$f \geqslant g$，则

$$\int_I f \geqslant \int_I g.$$

5. 设 f 是 $[a, b]$ 上的非负连续函数，并且

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

则 $f = 0$。

6. 利用习题 5 的结果证明：若 f 是 $[a, b]$ 上的实连续函数，并且

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

则存在点 c，$a \leqslant c \leqslant b$，使 $f(c) = 0$。

7. 利用习题 6 的结果证明积分学的第一中值定理：若 f 是区间 $[a, b]$ 上的实连续函数，则存在一点 c，$a \leqslant c \leqslant b$，使得

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(c).$$

8. 举例说明习题 7 的中值定理对某些复连续函数不成立。

9. 若 f 是 $[a, b]$ 上的实连续函数，使得

(i) $|f| \leqslant 1$;

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx = b - a$。

证明 $f = 1$。

10. 对复连续函数 f 证明习题 9。

11. 若 f 是闭区间 I 上的复连续函数，使得

$$\int_I f = \int_I |f|,$$

证明 f 是实值的，并且 $f \geqslant 0$。

12. 对连续函数的积分证明 Cauchy-Schwartz 不等式：若 f，g 是 $[a, b]$ 上的实连续函数，则

$$\left(\int_I fg\right)^2 \leqslant \int_I f^2 \int_I g^2.$$

4.3 积分的基本性质

我们要总结积分的性质，它们会被反复使用。

定理 4 设F是从闭区间$I=[a, b]$到R^m中的函数，并且F是Riemann可积的。

(i) (**正性**) 若F是非负实值函数，即$m=1$并且$F\geqslant 0$，则

$$\int_I F\geqslant 0.$$

(ii) (**线性**) 若G是另一个从I到R^m中的Riemann可积函数，c是任一实数，则$(cF+G)$Riemann可积，并且

$$\int_I (cF+G)=c\int_I F+\int_I G.$$

(iii) (**有界性**) 函数F是有界的，并且

$$\left|\int_a^b F(x)dx\right|\leqslant (b-a)\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|F(x)|.$$

(iv) 函数$|F|$是Riemann可积的，并且

$$\left|\int_I F\right|\leqslant\int_I |F|.$$

证明 (i)和(ii)在4.2节习题中已有了。

(iii) 设$P=(x_0, \cdots, x_n)$是$[a, b]$的任一划分，$T=(t_1, \cdots, t_n)$是任选的点，$t_k\in[x_{k-1}, x_k]$，并且

$$S(F, P, T)=\sum_{k=1}^n (x_k-x_{k-1})F(t_k)$$

满足

$$(4.18)\qquad |S(F, P, T)|\leqslant\sum_{k=1}^n (x_k-x_{k-1})|F(t_k)|.$$

若

$$M=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|F(x)|,$$

从(4.18)可得出

$$|S(F, P, T)|\leqslant M\sum_{k=1}^n (x_k-x_{k-1})$$
$$=M(b-a).$$

因为对于每一个和$S(F, P, T)$，上式成立，因而有

$$\left|\int_a^b F(x)dx\right| \leqslant M(b-a).$$

但是怎么知道 $M<\infty$，也就是为什么 F 是有界的呢？假如 F 不是有界的，设 $P=(x_0, \cdots, x_n)$ 是 $[a, b]$ 的任意划分，则至少有一个足标 k，使 F 在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上不是有界的。把这样的 k 取定，在 $[x_{k-1}, x_k]$ 中挑选点列 $\{c_j\}$，使得

$$\lim_j |F(c_j)| = \infty. \tag{4.19}$$

设 T_j 是由 P 所定义的子区间中的点，$t_i = x_i$，$i \neq k$，而 $t_k = c_j$。亦即，令 $T_j = (x_1, \cdots, x_{k-1}, c_j, x_{k+1}, \cdots, x_n)$。则

$$S(F, P, T_j) = \sum_{i \neq k} (x_i - x_{i-1})F(x_i) + (x_k - x_{k-1})F(c_j).$$

从(4.19)有

$$\lim_j |S(F, P, T_j)| = \infty.$$

对每一个划分 P，都存在这样的序列 $\{T_j\}$，对每一个 $\delta>0$，集 $\Sigma_\delta(F)$ 是无界的。于是，F 就不是 Riemann 可积了。

(iv) 不等式

$$\left|\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})F(t_k)\right| \leqslant \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})|F(t_k)|,$$

换一个写法就是，对一切划分 P 和选出的点 T 有

$$|S(F, P, T)| \leqslant S(|F|, P, T).$$

因此，若 $|F|$ 是 Riemann 可积的，那末

$$\left|\int_I F\right| \leqslant \int_I |F|. \tag{4.20}$$

若 F 连续，则 $|F|$ 连续；从而 $|F|$ 是 Riemann 可积的，因此不等式(4.20)成立。在本书中，可求积的函数多数是分段连续的(将在后面定义)。显然，若 F 分段连续则 $|F|$ 也分段连续。因此，在初次阅读时，可省去证明以下事实：由 F 的可积性可以推出 $|F|$ 的可积性。这一事实将在下节实值函数的 Riemann 可积性中讨论。

定理 5 设F是区间 $[a, b]$ 到 R^m 中的函数，$a<c<b$，若F在区间$[a, c]$和区间 $[c, b]$ 上 Riemann 可积，则F在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积，并且

$$\int_a^b F(x)dx=\int_a^c F(x)dx+\int_c^b F(x)dx.$$

证明 这一想法是很简单的，但写起来稍许繁琐点。设 $P=(x_0, \cdots, x_n)$是$[a,b]$的任一划分，则只有一个 k，使得$x_{k-1}<c\leqslant x_k$。于是，$Q=(x_0, \cdots, x_{k-1}, c)$和$R=(c, x_k, \cdots, x_n)$分别是 $[a, c]$ 和 $[c, b]$的划分。设 $T=(t_1, \cdots, t_n)$是任选的点，且 $t_i\in[x_{i-1}, x_i]$，则 $U=(t_1, \cdots, t_{k-1}, c)$ 和 $V=(c, t_k, \cdots, t_n)$ 是Q和R的子区间内的点。现在

$$S(F, Q, U)=\sum_{i=1}^{k-1}(x_i-x_{i-1})F(t_i)+(c-x_{i-1})F(c),$$

$$S(F, R, V)=\sum_{i=k+1}^{n}(x_i-x_{i-1})F(t_i)+(x_k-c)F(c),$$

$$S(F, P, T)=\sum_{i\neq k}(x_i-x_{i-1})F(t_i)+(x_k-x_{k-1})F(t_k).$$

因此，

$$S(F, P, T)=S(F, Q, U)+S(F, R, V)+(x_k-x_{k-1})[F(t_k)-F(c)]. \tag{4.21}$$

想法是，当$\|P\|$是小的，右边第一项和$\int_a^c F$接近，右边第二项和$\int_c^b F$接近，而第三项是小的。确切地说，令 $\varepsilon>0$，由于F在$[a, c]$可积，存在 $\delta>0$，使得对$[a, c]$的一切划分 Q，当$\|Q\|<\delta$（以及对一切任选的U），有

$$\left|\int_a^c F(x)dx-S(F, Q, U)\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.22}$$

类似地，存在$\eta>0$，使对一切$[c, b]$的划分 R，当 $\|R\|\leqslant\eta$（和一切V），有

(4.23) $$\left|\int_a^b F(x)dx - S(F, R, V)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

现在

(4.24) $$|(x_k - x_{k-1})[F(t_k) - F(c)]| \leqslant 2\|Q\| M,$$

式中

$$M = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |F(x)|.$$

设P是$[a, b]$的任一划分，使得

$$\|P\| \leqslant \min\left(\delta, \eta, \frac{\varepsilon}{6\|Q\|M}\right),$$

设T是选出的对应点$t_i(i=1, 2, \cdots, n)$，利用点c构造Q, R, U和V。此时，(4.24)右边的项小于$\varepsilon/3$，根据式(4.21)，(4.22)和(4.23)就有

$$\left|\int_a^c F(x)dx + \int_c^b F(x)dx - S(F, P, T)\right| < \varepsilon.$$

因此F在$[a, b]$上Riemann可积，它的积分是两个子区间上积分之和。

当$b<a$，并且F在$[b, a]$上可积时，定义

$$\int_a^b F(x)dx = -\int_b^a F(x)dx,$$

这一定义是很有用的。不论a，b，c的次序如何，总成立加法公式

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b.$$

当然，这里要求函数在三个区间中的最大的区间上可积。

定义 设F是闭区间$[a, b]$到R^m中的函数，如果存在$[a, b]$的划分$P=(x_0, \cdots, x_n)$，使F在每一个开区间(x_{i-1}, x_i)上，$i=1, 2, \cdots, n$都一致连续，我们就说F是**分段连续**的。

定理 6 区间$[a, b]$上每一个分段连续函数Riemann可积。

证明 设F分段连续，$P=(x_0, \cdots, x_n)$是$[a, b]$的划分，使得

F在每一个子区间(x_{k-1}, x_k)上一致连续。由定理5，只要证明F在每一个子区间$[x_{k-1}, x_k]$上 Riemann 可积就可以了。固定足标k，由于F在(x_{k-1}, x_k)上一致连续，就可以把F扩张成闭区间$[x_{k-1}, x_k]$上的连续函数。于是有$[x_{k-1}, x_k]$上的连续函数G，当$x_{k-1}<x<x_k$时，$G(x)=F(x)$。G是 Riemann 可积的，由于$F(x)$和$G(x)$最多只在$[x_{k-1}, x_k]$的两个端点不相同，故F是 Riemann 可积的（见习题2）。

定理7（微积分的基本定理） 设F是$[a,b]$到R^m中的 Riemann 可积函数，函数G由下式定义：

$$G(x)=\int_a^x F(u)du, \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

则G是$[a, b]$上的连续函数。设x是$[a, b]$的一点，F在此点连续，则G在x点可微，且$G'(x)=F(x)$。

证明 我们有

$$G(t)-G(x)=\int_a^t F(u)du-\int_a^x F(u)du$$

$$=\int_x^t F(u)du.$$

于是

$$|G(t)-G(x)|\leqslant|t-x|\sup_{a\leqslant u\leqslant b}|F(u)|.$$

由于F是有界的，这就（直接地）证明了G是一致连续的。设x是F的连续点，有

$$\frac{G(t)-G(x)}{t-x}=\frac{1}{t-x}\int_x^t F(u)du.$$

因此，

$$\frac{G(t)-G(x)}{t-x}-F(x)=\frac{1}{t-x}\int_x^t F(u)du-F(x)$$

$$=\frac{1}{t-x}\int_x^t [F(u)-F(x)]du,$$

并且

$$(4.25)\qquad \left|\frac{G(t)-G(x)}{t-x}-F(x)\right| \leqslant |t-x|^{-1}\left|\int_x^t [F(u)-F(x)]du\right|.$$

最后的积分有多大？它不大于 $|t-x|\omega(x_1|x-t|)$，
式中

$$\omega(x,\ \delta)=\sup\{|F(u)-F(x)|;\ |u-x|\leqslant\delta\}.$$

从(4.25)有

$$(4.26)\qquad \left|\frac{G(t)-G(x)}{t-x}-F(x)\right|\leqslant\omega(x_1|x-t|).$$

由于F在点x连续，

$$\lim_{\delta\to0}\omega(x,\ \delta)=0.$$

从(4.26)得出

$$\lim_{t\to x}\frac{G(t)-G(x)}{t-x}=F(x).$$

因此，G在x点可微，且$G'(x)=F(x)$.

系　设I是实直线上的任一区间，它有非空的内部，F是从I到R^m中的任一连续函数，则存在从I到R^m中函数G，使得（G是可微的，并且）

$$G'=F.$$

证明　I有非空内部的假设是为了排除发生退化区间，即退化为一点的情形。I可以是任何类型的区间：开的，闭的，半闭的，有界的或无界的。在证明中，取a是I内部的一点，并定义

$$G(x)=\int_a^x F(u)du,\qquad x\in I,$$

就可以了。

系　设F是从闭区间$[a,\ b]$到R^m中的分段连续函数，G是从$[a,\ b]$到R^m中的任一连续函数，并且除了有限个x点外，有

$G'(x)=F(x)$，则

$$\int_a^b F(x)dx=G(b)-G(a).$$

证明 定义

$$H(x)=G(a)-G(x)+\int_a^x F(u)du,$$

则H在$[a, b]$上连续，除了有限个点外，它的导数存在且为0，因此 $H=0$。从 $H(b)=0$，就得出结论。

最后的系也是微积分的基本定理，它是综合定理7和下列事实得出的：在开区间上的可微函数若导数为0，则必为常数。它是一个有力的工具，对连续函数F，如能知道 $G'=F$，则F在它定义域内的任一闭区间上的积分就可用G在两端点的值相减而得到。当然，读者对这些是很熟悉的。这里我们着重指出联系微分和积分的这一结果的妙处和力量。一旦我们知道x^{n+1}，$\sin x$，$\cos x$，e^x，$\tan^{-1}x$的导数，我们就可以把计算

$$\int_a^b x^n dx,\quad \int_a^b \cos x\, dx, \int_a^b \sin x\, dx, \int_a^b e^x dx, \int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx,$$

化为计算"反导数"函数在b和a的值。对读者来说，再一次复习下述公式是值得的：

$$\sin x=\int_0^x \cos t dt,\quad e^b-e^a=\int_a^b e^t dt,\quad \frac{\pi}{4}=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx,$$

并请回忆它们关于面积的解释。

第一个系毫无疑问是数学中最基本的定理之一：若F是区间上的连续函数，微分方程 $G'(x)=F(x)$ 有一个解G。如果我们确定G在某一点x_0的值，则G是唯一的。积分过程描述了应如何求出G在给定点的值。

定理3（变数变换定理） 设g是从区间$[c, d]$到区间$[a, b]$中的C^1类实值函数，并且$a=g(c)$，$b=g(d)$。F是从$[a, b]$到R^m

的任一连续函数，则

$$\int_a^b F(x)dx=\int_c^d g'(t)F(g(t))dt.$$

证明 设 $G(x)=\int_a^x F(u)du$，则 G 是可微的，并且 $G'=F$. 于是复合 $H(t)=G(g(t))$ 是区间 $[c, d]$ 上的 C^1 类函数，而且，链规则指出

$$H'(t)=g'(t)G'(g(t))=g'(t)F(g(t)).$$

于是

$$\int_c^d g'(t)\,F(g(t))\,dt=\int_c^d H'(t)dt=H(d)-H(c)$$

$$=G(b)-G(a)=\int_a^b F(x)dx.$$

习 题

1. 设 F 是 $[a, b]$ 上的分段连续函数，并且

$$\int_a^b |F(x)|dx=0,$$

关于 F，你能说什么?

2. 设 G 是 $[a, b]$ 上的 Riemann 可积函数，F 是函数，除了有限个点 x 外，$G(x)=F(x)$，则 F 是 Riemann 可积的，并且

$$\int_a^b F(x)dx=\int_a^b G(x)dx.$$

3. 证明

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}dx=0,\quad n=\pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

4. 证明对任何固定的 a, b

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_a^b e^{it\alpha}dt=0.$$

5. 设 f 是实直线上的函数：

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{若 } x \text{ 是无理数或 } 0\\ \dfrac{1}{q}, & \text{若 } x=\dfrac{p}{q}\ \text{(既约分数)},\end{cases}$$

(第二条表示：若 x 是有理数并且不为 0，设 $x=p/q$，式中 p 是整数，q 是正整数，并且 p 和 q 没有异于 ± 1 的公因子，则定义 $f(x)=1/q$。）证明在每一区间 $[a, b]$ 上，f Riemann 可积，其积分值为 0。

6. 设 f 是 Cantor 集 K 的特征函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in K,\\ 0, & x\notin K.\end{cases}$$

(Cantor 集见第 3 章例 24。）证明 f 在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积，并且

$$\int_0^1 f(x)dx=0.$$

7. 设 F 是开区间 (a,b) 上的有界连续函数，证明 F 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积（根据习题 2，$F(a)$ 和 $F(b)$ 如何定义是无所谓的。）

8. 设 $\{x_n\}$ 是区间 $[a, b]$ 中（由不相同的点所组成）的收敛点列，F 是从 $[a, b]$ 到 R^m 中的函数，使得

(i) F 是有界的；

(ii) 除了（可能）在点 x_1，x_2，…外，$F(x)=0$。证明 F 是 Riemann 可积的，并且

$$\int_a^b F(x)dx=0.$$

9. 设 A 是已知的 $k\times k$ 矩阵，并定义

$$F(t)=e^{tA}, \quad t\in R.$$

利用微积分基本定理去求函数 G，使 $G'=F$。是否可把 G 猜成

$$G(t)=A^{-1}e^{tA}?$$

若 A 不是可逆矩阵，情况又怎样呢？

10. 设 f 是 $[a, b]$ 上的实值 Riemann 可积函数，而 F 是从 $[a, b]$ 到 R^m 中的 Riemann 可积函数，则 fF 是 Riemann 可积的。

4.4 可积性和实值函数

在这简短的一节中，我们将按 Riemann 本人的方式，讨论直线上的实值函数的 Riemann 可积性准则。要检验实函数的可积性，最根本的一点就是按照实数的顺序，来比较在同一个划分之下，由不同的点 T 所成的和 $S(f,P,T)$。事实上，当划分 P 的网眼

减少到0，对每一个有界函数，都有一个上积分和下积分，把它们作比较，函数是 Riemann 可积的当且仅当上积分和下积分相等。

定义 设 f 是区间 $[a, b]$ 上的有界实值函数，$P=(x_0, \cdots, x_n)$ 是 $[a, b]$ 的划分。由 f 和 P 所决定的 **Riemann 上和及 Riemann 下和**分别是：

$$\overline{S}(f, P)=\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1}),$$

$$\underline{S}(f, P)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1}),$$

式中

$$M_k=\sup_{x\in I_k} f(x), \quad m_k=\inf_{x\in I_k} f(x), \quad I_k=[x_{k-1}, x_k].$$

注意，由于假定 f 是有界的，因而定义中出现的上确界和下确界是有限的。引进 Riemann 上和，Riemann 下和的目的很明显：若 $T=(t_1, \cdots, t_k)$ 是点 t_k 的任一选取，$t_k\in[x_{k-1}, x_k]$ 则

$$\underline{S}(f, P)\leqslant S(f, P, T)\leqslant\overline{S}(f, P),$$

并且由不同的 T 所得的近似和的数值将落在 $\overline{S}(f, P)$ 和 $\underline{S}(f, P)$ 之间，于是对小网眼的各种各样划分 P 的 $\overline{S}(f, P)-\underline{S}(f, P)$ 的大小就成为 f 可积性的某种度量指标。下面的定理证明了 f 的 Riemann 可积性确实可用这种方式来度量。我们十分希望读者对 $f\geqslant 0$ 的情形作一幅图，可看出 $\overline{S}(f, P)$ 和 $\underline{S}(f, P)$ 是在划分 P 下 f 图象的面积的两种估计值。在阅读本节时，请记住这个事实。

引理 设 P 和 Q 是 $[a, b]$ 的划分，而 Q 是 P 的加细，则

$$\overline{S}(f, Q)\leqslant\overline{S}(f, P),$$

$$\underline{S}(f, Q)\geqslant\underline{S}(f, P).$$

证明 这一证明留作习题，但作些说明。由 Q 所定义的子区间 I 必定正好含在由 P 所定义的子区间 J 中，并有

$$\sup_I f \leqslant \sup_J f,$$

$$\inf_I f \geqslant \inf_J f.$$

引理 若 P 和 P' 是 $[a, b]$ 的任何划分，则

$$\underline{S}(f, P) \leqslant \bar{S}(f, P').$$

证明 把划分 P 和 P' 合并就得到另一个划分 Q，显然 Q 是 P 的加细，也是 P' 的加细。把上面的引理用于 (P, Q) 和 (P', Q)，就有

$$\underline{S}(f, P) \leqslant \underline{S}(f, Q) \leqslant \bar{S}(f, Q) \leqslant \bar{S}(f, P').$$

定义 设 f 是区间 $[a, b]$ 上的有界实值函数，f 的(Riemann)**上积分**和**下积分**分别是：

$$U(f) = \inf_P \bar{S}(f, P),$$

$$L(f) = \sup_P \bar{S}(f, P),$$

式中 P 是 $[a, b]$ 的任一划分。

根据后一引理，对每一个有界函数 f，

$$L(f) \leqslant U(f).$$

若 f 是 Riemann 可积的，显然有

$$\int_a^b f(x)dx = L(f) = U(f).$$

定理 9 设 f 是闭区间 $[a, b]$ 上的有界实值函数，以下条件是等价的：

(i) f 是 Riemann 可积的。

(ii) $U(f) = L(f)$。

(iii) 对任一 $\varepsilon > 0$，存在 $[a, b]$ 的划分 P，使

$$\bar{S}(P) - \underline{S}(P) < \varepsilon.$$

(iv) $\lim\limits_{\|P\| \to 0} [\bar{S}(P) - \underline{S}(P)] = 0$.

证明 (i)⇒(ii)。设 f 是 Riemann 可积的，令 $\varepsilon > 0$，存在

$\delta>0$，使集 $\Sigma_\delta(f)=\{S(f,P,T);\ \|P\|\leqslant\delta\}$ 有小于 ε 的直径。所以有 $U(f)-L(f)<\varepsilon$。

(ii)⇒(iii)。假如 $U(f)=L(f)$。令 $\varepsilon>0$，存在划分 P，P'，使得

$$\bar{S}(P)<U(f)+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\underline{S}(P')>L(f)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $U(f)=L(f)$，所以 $\bar{S}(P)-\underline{S}(P')<\varepsilon$。把 P 和 P' 合并得到 Q，Q 是 P 和 P' 的共同加细。由于 $\bar{S}(Q)\leqslant\bar{S}(P)$ 和 $\underline{S}(Q)\geqslant\underline{S}(P')$，就有 $\bar{S}(Q)-\underline{S}(Q)<\varepsilon$。

(iii)⇒(iv)。假定 (iii)成立，令 $\varepsilon>0$，选择区间 $[a,b]$ 的划分 $Q=(y_0,\cdots,y_m)$，使得 $\bar{S}(Q)-\underline{S}(Q)<\frac{\varepsilon}{2}$。我们要利用固定的划分 Q 去求出 $\delta>0$，使得对于一切网眼不超过 δ 的划分 P，成立 $\bar{S}(P)-\underline{S}(P)<\epsilon$。这一想法是：给定任一划分 $P=(x_0,\cdots,x_n)$，定义 P^* 是 P 和 Q 的共同加细．我们来比较 $\bar{S}(f,P)$ 与 $\bar{S}(f,P^*)$。

$$\bar{S}(f,P)=\sum_{k=1}^{n}M_k(x_k-x_{k-1}),$$

若对足标 k，有某一个 y_j 在 $[x_{k-1},x_k]$ 内部，除了这些 k 的值外，在上述和中的每一项都出现在 $\bar{S}(f,P^*)$ 的项中。这样的 k 最多只有 $(m-1)$ 个；因此，对应于这些 k 的项 $M_k(x_k-x_{k-1})$ 之和不能超过

$$(m-1)M\|P\|,$$

式中 $M=\sup\limits_{[a,b]}f$。于是

$$\bar{S}(f,P)\leqslant\bar{S}(f,P^*)+(m-1)M\|P\|.$$

根据类似的理由

$$\underline{S}(f, P) \geqslant \underline{S}(f, P^*) - (m-1)M\|P\|.$$

现在，取 $\delta = \varepsilon/4(m-1)M$。由上述不等式得出

$$\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \bar{S}(f, P^*) - \underline{S}(f, P^*) + \frac{\varepsilon}{2},$$

由于 P^* 是 Q 的加细，所以

$$\bar{S}(f, P^*) - \underline{S}(f, P^*) \leqslant \bar{S}(f, Q) - \underline{S}(f, Q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，对一切划分 P，只要 $\|P\| \leqslant \delta$，就有

$$\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon.$$

(iv)⇒(i) 我们要从 (iv) 推出：当 δ 趋于 0 时，集 $\Sigma_\delta(f) = \{S(f, P, T); \|P\| \leqslant \delta\}$ 的直径趋于 0。我们需要证明

$$\frac{1}{2} \operatorname{diam} \Sigma_\delta(f) \leqslant \sup_{\|P\| \leqslant \delta} [\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P)] \leqslant \operatorname{diam} \Sigma_\delta(f).$$

右边的不等式是平凡的，因为

$$\operatorname{diam} \Sigma_\delta(f) = \sup |S(f, P, T) - S(f, Q, U)|,$$

而式中上确界的取法，是对应于网眼不超过 δ 的一切划分 P 和 Q，以及由 P 和 Q 所定义的子区间中的一切对应的点 T 和 U。

下面验证左边的不等式。设 P 和 Q 是 $[a, b]$ 的任一划分。根据前一引理，$\bar{S}(f, Q) - \underline{S}(f, P) \geqslant 0$，因而有

$$\begin{aligned}
\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, Q) &\leqslant \bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, Q) \\
&\quad + [\bar{S}(f, Q) - \underline{S}(f, P)] \\
&= \bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) + \bar{S}(f, Q) - \underline{S}(f, Q) \\
&= [\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P)] + [\bar{S}(f, Q) - \underline{S}(f, Q)] \\
&\leqslant 2 \sup_{\|P\| \leqslant \delta} [\bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P)].
\end{aligned}$$

系 区间 $[a, b]$ 上的单调增（或减少）函数 f 是 Riemann 可积的。

证明 设 $P = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 是 $[a, b]$ 的任一划分。因为 f 是增函数，对每一个子区间 $I_k = [x_{k-1}, x_k]$，有

$$\sup_{I_k} f = f(x_k),$$

$$\inf_{I_k} f = f(x_{k-1}).$$

相应地，

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}),$$

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}),$$

所以

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})](x_k - x_{k-1})$$

$$\leqslant \|P\| \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})]$$

$$= \|P\| [f(b) - f(a)].$$

从而有

$$\lim_{\|P\| \to 0} [\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P)] = 0.$$

系 设 f 是区间 $I = [a, b]$ 上的实值 Riemann 可积函数，则 $|f|$ 是 Riemann 可积的，且

$$\left| \int_I f \right| \leqslant \int_I |f|.$$

证明 若能证明 $|f|$ 是 Riemann 可积的，那么上述积分不等式就显然成立了．因此，只要证明对每一个划分 P，有

$$\overline{S}(|f|, P) - \underline{S}(|f|, P) \leqslant \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P).$$

这是容易证明的，因为对于由 P 所定义的每一个子区间 $I_k = [x_{k-1}, x_k]$，有

$$\sup_{I_k} |f| - \inf_{I_k} |f| = \sup_{s,t \in I_k} [|f(t)| - |f(s)|]$$

$$\leqslant \sup_{s,t \in I_k} |f(t) - f(s)|$$

$$= \sup_{s,t \in I_k} [f(t) - f(s)]$$

$$= \sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f.$$

上述第二、第三步是关键的步骤，其中我们利用了 f 是实值函数的条件，还利用了 $|f(t)-f(s)|$ 是 $f(t)-f(s)$ 或者是 $f(s)-f(t)$。

系 若 F 是从区间 $I=[a, b]$ 到 R^m 的 Riemann 可积函数，则 $|F|$ 是 Riemann 可积的，并且

$$\left|\int_I F\right| \leqslant \int_I |F|.$$

证明 我们要再一次证明 $|F|$ 是 Riemann 可积的。设 $P=(x_0, \cdots, x_n)$ 是 $[a, b]$ 的任一划分，则

$$\bar{S}(|F|, P)-\underline{S}(|F|, P)=\sum_{k=1}^{n} \eta_k(x_k-x_{k-1}),$$

式中

$$\eta_k=\sup_{s, t \in I_k}[|F(t)|-|F(s)|], \quad I_k=[x_{k-1}, x_k].$$

若 $y=(y_1, \cdots, y_m)$ 和 $z=(z_1, \cdots, z_m)$ 是 R^m 的任意两个向量，则

$$|z|-|y| \leqslant \sum_{j=1}^{m}|z_j-y_j|.$$

于是，若 $F=(f_1, \cdots, f_m)$，就有

$$|F(t)|-|F(s)| \leqslant \sum_{j=1}^{m}|f_j(t)-f_j(s)|.$$

因此，

$$\begin{aligned}
\eta_k &\leqslant \sup_{s, t \in I_k} \sum_{j=1}^{m}|f_j(t)-f_j(s)| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{m} \sup_{s, t \in I_k}|f_j(t)-f_j(s)| \\
&=\sum_{j=1}^{m} \sup_{s, t \in I_k}[f_j(t)-f_j(s)].
\end{aligned}$$

于是，

$$\bar{S}(|F|, P)-\underline{S}(|F|, P) \leqslant \sum_{j=1}^{m}[\bar{S}(f_j, P)-\underline{S}(f_j, P)].$$

由于 F 是 Riemann 可积的，因而每一个 f_j 也 Riemann 可积。于是，从上述不等式和定理 9 就得出 $|F|$ 是 Riemann 可积的。

习 题

1. 把本节第一个引理的证明补全.

2. 若 f 是 $[a, b]$ 上的实值 Riemann 可积函数, 证明 f^2 是Riemann 可积的.

3. 用习题 2 结论证明: 两个实值 Riemann 可积函数的积是 Riemann 可积的.

4. 若 F 和 G 是从 $[a, b]$ 到 R^m 中的 Riemann 可积函数, 则函数 $\langle F, G\rangle$ 是 Riemann 可积的.

5. 对复值函数建立习题 3 的结果.

6. 设 f 是 $[a, b]$ 上的实值函数, 若存在 $[a, b]$ 的一个划分 P, 使 f 在划分的每一个子区间上为非减或非增, 则称 f 是**分段单调函数**. 证明每一个分段单调函数是 Riemann 可积的.

7. 设 f 是 $[a, b]$ 上非减实值函数, 则

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

是 $[a, b]$ 上的凸函数.

8. 设 f 是非负 Riemann 可积函数, 则 $\sqrt{f}$ 是 Riemann 可积的.

4.5 R^n 中的微分和积分

我们不打算在这里对 n 维空间的导数和积分作全面的讨论, 只准备讨论几件常常用到的事实, 并把它们很自然地用到一维情况, 前面我们故意推迟了对它们的讨论.

如果我们从 R^1 的微分出发, 很自然地要考虑 R^n 中函数沿直线的微分. 这样的导数度量了不同方向的变化率. 如果我们作出从原点出发的不同方向, 每一个方向都被表示成从原点出发的射线. 可以方便的用单位球上的点来计算射线的数量, 每一条从原点出发的射线恰好对应一个向量 v, $|v|=1$.

设 F 是从 R^n (的子集)到 R^m 中的函数, x 是 F 定义域内部的点. 若 $|v|=1$, 我们要问极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(x+tv)-F(x)}{t}$$

是否存在．如果极限存在，我们就把这一极限叫做**F在x沿（单位）向量v的导数**，并用$(D_vF)(x)$来记．请注意，x是F定义域内部的点，这样，对一切充分小的$t\in R$，将有$x+tv$也在定义域内．

可以对R^n中一切向量v讨论

(4.27) $$(D_vF)(x)=\lim_{t\to 0}t^{-1}[F(x+tv)-F(x)].$$

容易看到，若$(D_vF)(x)$存在，则对每一个$c\in R$，$(D_{cv}F)(x)$也存在，并且

$$(D_{cv}F)(x)=c(D_vF)(x).$$

若$v\neq 0$，v方向的单位向量是$|v|^{-1}v$．于是，F在x点沿方向v的导数(如果它存在)是

$$\frac{1}{|v|}(D_vF)(x).$$

F在标准基向量方向的导数（如果它们存在）叫做F的**偏导数**，用D_jF来记(由于$D_{e_j}F$太繁而改用D_jF)．于是

$$(D_jF)(x)=\lim_{t\to 0}t^{-1}[F(x_1,\cdots,x_j+t,\cdots,x_n)$$
$$-F(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)].$$

同时，我们也常使用记号

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}=D_jF.$$

C^1类的函数(或映射)是这样的函数：

(i) F的定义域是R^n的开子集；

(ii) 偏导数$D_1F,\cdots,D_nF$存在而且是连续函数．

对$k\geq 2$，若偏导数$D_1F,\cdots,D_nF$是C^{k-1}类函数，则称F是**C^k类函数**．如果对每一个k，$k=1,2,3,\cdots$，F是C^k类函数，则称F是**C^∞类函数**．

定理10 设F是R^n中开集U上的C^1类映射，若$x\in U$，

$v\in R^n$，则导数$(D_vF)(x)$存在，并且

(4.28) $$(D_vF)(x)=v_1(D_1F)(x)+\cdots+v_n(D_nF)(x).$$

证明 映射F是U上的m维实值函数，$F=(f_1,\cdots,f_m)$。显然

$$D_iF=(D_if_1,\cdots,D_if_m).$$

因此，只需要对实值函数证明本定理。

为此，设

$$U\xrightarrow{f}R$$

是U上的C^1类函数。令$x\in U$，$v\in R^n$。存在$\delta>0$，使得$(x+tv)\in U$，$|t|<\delta$。对任意满足$|t|<\delta$的t，考虑差商

$$\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$$

$$=\frac{f(x_1+tv_1,\cdots,x_n+tv_n)-f(x_1,\cdots,x_n)}{t}.$$

在上述差商中加一些项，减一些项，以$n=3$为例写全这个式子为：

$$\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$$

$$=\frac{f(x_1+tv_1,x_2+tv_2,x_3+tv_3)-f(x_1,x_2+tv_2,x_3+tv_3)}{t}$$

(4.29) $$+\frac{f(x_1,x_2+tv_2,x_3+tv_3)-f(x_1,x_2,x_3+tv_3)}{t}$$

$$+\frac{f(x_1,x_2,x_3+tv_3)-f(x_1,x_2,x_3)}{t}.$$

固定t，当$Q_t=x+tv$是开球$B(x;\delta|v|)$中的点时，$P_t=(x_1,x_2+tv_2,x_3+tv_3)$也是开球$B(x;\delta|v|)$中的点。沿从$P_t$到$Q_t$的线段，对$f$用中值定理，也就是对函数

$$g(x)=f(P_t+xe_1)$$

用中值定理。由于D_1f在U上存在，g是从0到tv_1区间上的可微函数。中值定理指出：

$$\frac{g(tv_1)-g(0)}{tv_1}=g'(\theta),$$

式中 θ 在 0 和 tv_1 之间。于是

$$\frac{f(Q_t)-f(P_t)}{t}=v_1(D_1f)(x_t),$$

其中 x_t 是 P_t 和 Q_t 之间的某一点。对(4.29)中第二项和第三项，同理可得相应的算式。于是有

$$(4.30)\quad \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}=v_1(D_1f)(x_t)+v_2(D_2f)(y_t)+v_3(D_3f)(z_t),$$

式中 x_t, y_t 和 z_t 是球 $B(x;|t||v|)$ 中的点。

当 t 趋于 0 时，点 x_t, y_t, z_t 收敛于 x. 由于导数 D_jf 是连续的，从(4.30)得出：

$$(D_vf)(x)=v_1(D_1f)(x)+v_2(D_2f)(x)+v_3(D_3f)(x).$$

设 f 是 C^1 类实值函数，则 f 的**梯度**是(连续的)向量值函数

$$\operatorname{grad} f=(D_1f, \cdots, D_nf).$$

此时，(4.28)成为

$$D_vf=\langle v, \operatorname{grad} f\rangle$$

$$=v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+v_n\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

换言之，f 在 x 沿方向 v 的导数是 v 和 f 在 x 的梯度的内积。

梯度这一记号略嫌麻烦，为方便起见采用下述记号：

$$f'=\operatorname{grad} f.$$

于是(4.28)成为

$$(D_vf)(x)=\langle v, f'(x)\rangle,$$

在使用这一记号时，记住 f' 是向量值函数。

至今，我们尚未提到 R^n 中的高阶导数。设 f 是 C^2 类函数，则 D_1f, …, D_nf 是 C^1 类，二阶导数是：

$$D_iD_jf=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j},\quad 1\leqslant i\leqslant n,\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

在 $i=j$ 的情形，通常写成

$$D_iD_if=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

若 f 是 C^2 类函数，则 $D_iD_jf=D_jD_if$，即

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}. \tag{4.31}$$

这是一个基本的事实。它的证明要推后几页，因为在对积分作一些基本考察以后再来讨论会容易些。从 (4.31) 看到，若 f 是 C^k 类，f 的每一 k 阶偏导数的形式是

$$D_1^{k_1}\cdots D_n^{k_n}f=\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}},$$

式中 $k_1+\cdots+k_n=k$。

设 f 是定义在 R^n 中开集 U 上的实值函数。若存在 $\delta>0$，使对一切 t，只要 $|x-t|\leqslant\delta$，就有 $f(x)\geqslant f(t)$，就称 f 在 U 中的点 x 有**局部极大**。简言之，如果存在 x 的一个邻域，在此邻域上，f 的值决不大于 $f(x)$，f 在 x 就有局部极大。可类似定义"局部极小"。

定理 11 设 f 是在 R^n 中开集 U 上的 C^1 类实值函数。若 f 在 U 中的点 x 有局部极大，则 $f'(x)=0$，即 $(D_jf)(x)=0$，$1\leqslant j\leqslant n$。

证明 留作习题。

让我们很快地转向讨论在 R^n 中闭长方体上(连续)函数的积分定义。它本质上和闭区间上的积分一样，因此无需太多叙述。

R^n 中**闭长方体**是 n 个闭区间的 Cartesian 积

$$B=I_1\times\cdots\times I_n=\{x;\ x_k\in I_k,\ 1\leqslant k\leqslant n\}.$$

如果 $I_k=[a_k,b_k]$，则

$$B=\{x;\ a_k\leqslant x\leqslant b_k,\ 1\leqslant k\leqslant n\}.$$

闭长方体 B 的**划分**是(闭)长方体 B_k 的集 $P=\{B_1,\ \cdots,\ B_N\}$，使得

(i) $P=B_1\cup\cdots\cup B_N$；

(ii) 若 $i\neq j$，B_i 内部和 B_j 内部的交是空集。

这一划分的**网眼**是

$$\|P\|=\max_k \operatorname{diam}(B_k).$$

如果每一个长方体 B'_j 包含在某一个 B_k 中，划分 $P'=\{B'_1,\cdots,B'_{N'}\}$ 是划分 $P'=\{B_1,\ \cdots,\ B_N\}$ 的**加细**。当 $n=1$ 时，上述三个定义和区间的有关划分的定义一致。注意以下事实，长方体

$$B=I_1\times\cdots\times I_n,\quad I_k=[a_k,\ b_k], \tag{4.32}$$

的划分可这样来构造：对每一个区间 I_1，$\cdots$，I_n 选择划分，并对一切子区间组成 Cartesian 积。例如，若 $n=2$，$I=[a,\ b]$，$J=[c,\ d]$ 并且

$$B=I\times J=\{(x,\ y);\quad a\leqslant x\leqslant b,\quad c\leqslant y\leqslant d\}.$$

设 $P=(x_0,\ \cdots,\ x_n)$ 是 $[a,\ b]$ 的划分和 $Q=(y_0,\ \cdots,\ y_p)$ 是 $[c,\ d]$ 的划分。乘积所成的长方体

$$I_k\times J_l=\{(x,\ y);\ x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k,\ y_{l-1}\leqslant y\leqslant y_l\}$$

是长方体 B 的划分。因为 k 从 1 到 n，而 l 从 1 到 p，故有 np 个长方体。用同样的方法可以从区间 I_k 的划分得到区域 B 的 (4.32) 型的划分；当 $n>2$ 时，记号要复杂些。

并不是 B 的任一个划分都可以用上述方法通过 I_1，$\cdots$，I_n 的划分而得到，但是每一个划分有这样类型的一个加细。

为了定义 n 维空间中的积分，需要长方体的 n 维体积，它是 $\boldsymbol{R}^1$ 中长度，R^2 中面积，R^3 中体积概念的拓广。我们将不用术语"n 维体积"，而用"测度"这个术语。于是，长方体 $B=I_1\times\cdots\times I_n$ 的**测度**是

$$m(B)=\prod_{k=1}^{n}(I_k)\text{的长度。}$$

设B是R^n中闭长方体，F是函数

$$B \xrightarrow{F} R^m.$$

若$P=\{B_1, \cdots, B_N\}$是B的任一划分，$T=(t_1, \cdots, t_N)$是任选的点，$t_k\in B_k$，定义

$$S(F, P, T)=\sum_{k=1}^{N} m(B_k)F(t_k), \tag{4.33}$$

如果极限

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(F, P, T)$$

存在，函数F就称为在长方体B上 **Riemann 可积**。对每一$\delta>0$，定义$\sum_\delta(F)=\{S(F, P, T);\|P\|\leqslant\delta\}$，则$F$是 Riemann 可积的当且仅当

$$\lim_{\delta\to 0}\operatorname{diam}\Sigma_\delta(F)=0.$$

当F可积时，F在B上的积分是

$$\int_B F=\bigcap_{\delta>0}\overline{\Sigma_\delta(F)}.$$

对这一积分也使用另外的记号：

$$\int_B F(x)dx, \int_B F(x_1, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n.$$

后一记号来自近似和的记号：$\Sigma F(x_1, \cdots, x_n)\Delta x_1\cdots\Delta x_n$.

在闭长方体B上的每一个连续函数是 Riemann 可积的。证明和$n=1$的情况一样，关键是利用一致连续性。

象定理 3 的系一样，连续函数F的积分满足

$$\left|\int_B F-S(F, P, T)\right|\leqslant m(B)\omega(F, 2\delta),$$

此式对每一个网眼不超过δ的划分（以及对划分的子长方体的任选的点T）成立。从连续函数的这一结论进一步可得到B上每一个分段连续函数是 Riemann 可积的。

对函数F

$$B \xrightarrow{F} R^m,$$

如果存在长方体B的划分 $P=\{B_1, \cdots, B_N\}$，使F在每一个长方体B_k的内部是一致连续的，F就叫做**分段连续**函数。

在定理4中总结了$n=1$时积分的基本性质。在$n>1$的情形下，这些性质可按照同样的方法加以推广。例如性质(iii)，只不过其中的$(b-a)$此时要用$m(B)$代替：

$$\left|\int_B F\right| \leqslant m(B) \sup_{x \in B} |F(x)|.$$

需要我们利用$n=1$的结论去证明的，还有这样一个引理：若$P=\{B_1, \cdots, B_N\}$是长方体B的划分，则有

$$m(B)=m(B_1)+\cdots+m(B_N).$$

积分的可加性也得到了推广，它类似于定理5：若$P=\{B_1, \cdots, B_N\}$是B的划分，并且

$$B \xrightarrow{F} R^m,$$

则F是可积的充要条件是F在每一个B_k上可积，并且当F可积时，

$$\int_B F=\int_{B_1} F+\cdots+\int_{B_N} F.$$

若F是长方体$B=I_1 \times \cdots \times I_n$上的可积函数，则$F$在$B$上的积分可以用累次积分来计算，也就是我们可以关于变量x_i逐个来计算

$$\int_B F(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

我们仅就F是连续函数的情况给以证明。由于更一般的结果在推导中需较多的技巧，证明它就离题太远了。

定理12（累次积分定理） 设F是闭长方体B上的连续函数。假如B_1和B_2是闭长方体，且

$$B = B_1 \times B_2.$$

则

$$\int_B F = \int_{B_2} \left\{ \int_{B_1} F(x, y) dx \right\} dy$$

$$= \int_{B_1} \left\{ \int_{B_2} F(x, y) dy \right\} dx.$$

证明 假设 B_j 是 R_{n_j} 中的闭长方体，式中 $n_1 + n_2 = n$，并且

$$B = \{x \in R^n; (x_1, \cdots, x_{n_1}) \in B_1 \text{ 和 } (x_{n_1+1}, \cdots, x_n) \in B_2\}.$$

对任意的长方体 B_1 和 B_2，要证明 $m(B_1 \times B_2) = m(B_1) m(B_2)$。在证明中为了防止陷入记号和琐事的迷宫，我们仅对 $n = 2$ 给出证明：

$$B = [a, b] \times [c, d].$$

选择划分

$$P = (x_0, \cdots, x_n), \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

$$Q = (y_0, \cdots, y_k), \quad c = y_0 < \cdots < y_k = d.$$

令 $B_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$，

$$S = \sum_{i,j} m(B_{ij}) F(x_i, y_j)$$

$$= \sum_{i,j} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) F(x_i, y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sum^{k} (y_j - y_{j-1}) F(x_i, y_j).$$

设 δ 是划分 $\{B_{ij}; 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant k\}$ 的网眼，则 $\|P\| \leqslant \delta$，$\|Q\| \leqslant \delta$。想法是，若 δ 是小的，那末

$$\sum_{j=1}^{k} (y_j - y_{j-1}) F(x_i, y_j) \approx \int_c^d F(x_i, y) dy.$$

我们可以对 x_i 一致地（不依赖于 x_i）估计逼近的程度。对任一固定的足标 i，由 $G_i(y) = F(x_i, y)$ 所定义的函数 G_i 是区间 $[c, d]$ 上的连续函数。根据定理 3 的系，

$$(4.34) \qquad \left| \int_c^d F(x_i, y) dy - \sum_{j=1}^{k} (y_j - y_{j-1}) F(x_i, y) \right|$$

$$\leqslant (d - c) \omega(G_i, 2\delta).$$

连续模$\omega(G_i, \delta)$定义如下：

$$\omega(G_i, \delta) = \sup\{|G_i(y) - G_i(z)|; y, z \in [c, d], |y - z| \leqslant \delta\}$$
$$= \sup\{|F(x_i, y) - F(x_i, z)|;$$
$$y, z \in [c, d], |y - z| \leqslant \delta\}.$$

若$|y-z| \leqslant \delta$，则点(x_i, y)和(x_i, z)相隔距离不超过δ。因此，

$$\omega(G_i, \delta) \leqslant \omega(F, \delta).$$

由不等式(4.34)有

$$(4.35)\qquad \left| S - \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \int_c^d F(x_i, y) dy \right|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(d-c)\omega(G_i, 2\delta)$$
$$\leqslant (d-c)\omega(F, 2\delta) \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$$
$$= (d-c)(b-a)\omega(F, 2\delta)$$
$$= m(B)\omega(F, 2\delta).$$

定义

$$G(x) = \int_c^d F(x, y) dy, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

则G是$[a, b]$上的连续函数，因为

$$|G(x) - G(t)| = \left| \int_c^d [F(x, y) - F(t, y)] dy \right|$$
$$\leqslant (d-c) \sup_{y \in [c, d]} |F(x, y) - F(t, y)|,$$

若$|x-t| \leqslant \delta$，有

$$|G(x) - G(t)| \leqslant (d-c)\omega(F, \delta).$$

因此，

$$\omega(G, \delta) \leqslant (d-c)\omega(F, \delta).$$

令

$$\tilde{S} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) G(x_i),$$

根据定理3的系，有

$$\left|\int_a^b G(x)dx-\tilde{S}\right|\leqslant(b-a)\omega(G,\ 2\delta)$$

$$\leqslant(b-a)(d-c)\omega(F,\ 2\delta)$$

$$=m(B)\omega(F,\ 2\delta),$$

由(4.35)可得出

$$|S-\tilde{S}|\leqslant m(B)\omega(F,\ 2\delta).$$

因此，

$$\left|\int_a^b G(x)dx-S\right|\leqslant 2m(B)\omega(F,\ 2\delta). \tag{4.36}$$

令 $\delta\to 0$ 就得到

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(F,\ 2\delta)=0,$$

$$\lim_{\delta\to 0}S=\int_B F.$$

从(4.36)即可得出

$$\int_B F=\int_a^b G(x)dx$$

$$=\int_a^b\left\{\int_c^d F(x,\ y)dy\right\}dx.$$

系 设 F 是长方体 B 上的连续函数，长方体 B 是

$$B=I_1\times\cdots\times I_n,\quad I_k=[a_k,\ b_k],$$

则

$$\int_B F=\int_{a_n}^{b_n}\cdots\int_{a_1}^{b_1}F(x_1,\ \cdots,\ x_n)dx_1\cdots dx_n,$$

式中右边记号的意义是：先把 $F(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 关于 x_1 求积，将所得结果再对 x_2 求积，如此一直进行下去，直到 n 为止。n 个求积次序可任意交换，结论仍然成立。

定理 13 设 F 是 R^n 的开子集上的 C^2 类函数，则 $D_iD_jF=D_jD_iF$，也就是

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 F}{\partial x_j\partial x_i},\quad 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant n.$$

证明 只需要对 $n=2$ 证明定理。令

$$B=[a,\ b]\times[c,\ d]$$

是 F 的定义域内的一个长方体。导数 D_1D_2F 是连续的，根据定理12和微积分基本定理

$$\int_B D_1D_2F=\int_c^d\int_a^b \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2}\,dx_1dx_2$$

$$=\int_c^d [(D_2F)(b,\ x_2)-(D_2F)(a,\ x_2)]dx_2$$

$$=F(b,\ d)-F(b,\ c)+F(a,\ c)-F(a,\ d).$$

把上式中的 b 换成 x，$a\leqslant x<b$，把 d 换成 y，$c\leqslant y\leqslant d$，就可以得到

$$F(x,\ y)=\int_c^y\int_a^x (D_1D_2F)(x_1,\ x_2)dx_1dx_2+F(x,\ c)$$

$$+F(a,\ y)-F(a,\ c)$$

$$=\int_a^x\int_c^y (D_1D_2F)(x_1,\ x_2)dx_2dx_1$$

$$+F(x,\ c)+F(a,\ y)-F(a,\ c).$$

从这个方程，计算 D_1F，我们有

$$(D_1F)(x,\ y)=\int_c^y (D_1D_2F)(x,\ x_2)dx_2+(D_1F)(x,\ c).$$

再把它关于 y 求微分，得到

$$(D_2D_1F)(x,\ y)=(D_1D_2F)(x,y).$$

在这一步中用了微积分基本定理和 D_1D_2F 是连续的这个事实。

系 设 F 是从 R^n 的开子集到 R^m 中的映射，i，j 是足标，$1\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant j\leqslant n$。设偏导数 D_iD_jF 存在且连续，则 D_jD_iF 也存在，并且

$$D_jD_iF=D_iD_jF.$$

证明 在定理13的证明中，我们利用混合偏导数之一的存在

和连续性证明另一个混合偏导数存在且两者相等

习　题

1. 设F是R^n中开集U上的连续函数，对每一个闭长方体$B\subset U$有

$$\int_B F=0,$$

则$F=0$。

2. 定义

$$f(x)=|x_1|^{1/2}|x_2|^{1/2},\quad x\in R^2.$$

(a) 证明f在原点存在偏导数。

(b) 找出向量v，使$(D_vf)(0)$不存在。

3. 设f是$R^n-\{0\}$上的C^1类函数，f的偏导数是一致连续函数，则f可以扩张为R^n上的C^1类函数吗？

4. 设f是开集U上的(实值)C^1类函数，若$x\in U$，证明(在x处)f增加最快的方向是f在x的梯度$f'(x)$的方向。

5. 设B是长方体，$x+B$是B的x-平移：

$$x+B=\{x+y;\ y\in B\}.$$

若f是R^n上的连续函数，而B是R^n中固定的长方体，令

$$g(x)=\int_{x+B}f,$$

则g是C^1类函数吗？

6. 设f是C^1类函数，x是f定义域中的点，则$(D_vf)(x)$是v的线性函数。

7. (中值定理)假如一个集包含连接它的任一对点的线段，就称它为凸集。设U是R^n中凸开集，而f是U上C^1类(实值)函数。设x，y在U中，证明

$$f(y)-f(x)=\langle y-x,\ f^1(P)\rangle,$$

式中P是x和y之间连线上的某一点。提示：令

$$g(t)=f[x+t(y-x)],\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

8. 设$k=(k_1,\ \cdots,\ k_n)$是一个n-数组，式中k_i是正整数，

$$k!=k_1!\cdots k_n!,$$

$$D^k=D_1^{k_1}\cdots D_n^{k_n}.$$

设f是R^n上的多项式函数，证明

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_k \frac{1}{k!} (D^k f)(0) x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

9. 设F是长方体B上的连续函数，K是B的紧子集。如果你想定义

$$\int_K F,$$

可以这样来做：设g是B上的连续函数，$0 \leqslant g \leqslant 1$，在$K$上$g=1$，而在$K$外$g<1$。证明

$$\lim_k \int_B g^k F$$

存在。提示：先就F是非负实值函数的情况来证明。

10．设F，B和K的含义如习题9中所介绍的。这里又有一个方法来定义F在K上的积分。设$P=\{B_1, \cdots, B_N\}$是B的划分，考虑与K有公共点的长方体B_k，对每一个这样的k，选择点$T_k \in B_k \cap K$，构造和

$$S_K = \sum F(T_k) m(B_k),$$

这里只对B_k和K有公共点的那些k求和。证明

$$\lim_{|P| \to 0} S_K$$

存在。提示：要证明上述极限存在，只要证当$|P|$是小的，有

$$S_K \approx \lim_k \int_B g^k F.$$

即可(参看习题9)。

4.6 Riemann-Stieltjes积分

严格说来，本节并不是普通微积分教程的组成部分。本节讨论的一类积分，比起4.2节所讨论的R^1中的积分，略微广泛些，但从技巧来说不会更复杂。一个很普通的例子是

$$\int_I f dG,$$

其中f是区间I上实值连续函数，G是(向量值)“有界变差”函数。这一积分是

$$\sum_1^n f(t_k)[G(x_k) - G(x_{k-1})]$$

的极限。下面我们来仔细定义将要使用的函数G的类。

设

$$[a, b] \xrightarrow{G} R^k$$

是从$[a, b]$到R^k中的(不必是连续的)映射。若

$$P = (x_0, \cdots, x_n),$$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

是$[a, b]$的划分，作和

$$V(P; G) = \sum_{k=1}^{n} |G(x_k) - G(x_{k-1})|. \tag{4.37}$$

这是相邻的两个$G(x_k)$之间的距离之和。若G是一一的，当划分的网眼趋于0时，这一距离之和提供了G在R^k中象的长度的最佳逼近(见图17)。

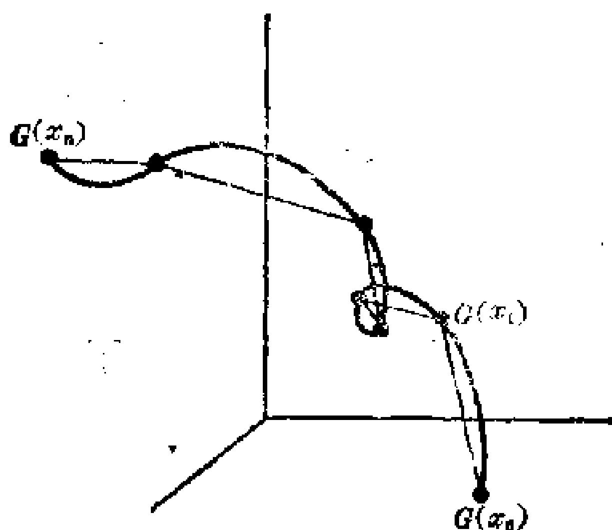


图 17

对函数G来说，如果和$V(P; G)$是有界的，也就是存在常数M，使对于一切划分P有$V(P; G) \leqslant M$，就说G是**有界变差**的。若G是有界变差的，G的**全变差**是

$$V_a^b(G) = \sup_P V(P; G). \tag{4.38}$$

若G是$[a, b]$上的有界变差函数，$a \leqslant x \leqslant b$，则显然有

(4.39) $$V_a^x(G)+V_x^b(G)=V_a^b(G).$$

由下面的式子所定义的函数 V_G

(4.40) $$V_G(x)=V_a^x(G),\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

称为 G 的变差，它是 $[a, b]$ 上的增函数。

在完成积分的讨论以前，先看几个例子。

例 5 设 G 是连续可微函数（属 C^1 类），则 G 是有界变差的：

$$\sum_k |G(x_k)-G(x_{k-1})|=\sum_k\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}G'(t)dt\right|$$

$$\leqslant\sum_k (x_k-x_{k-1})\sup|G'|$$

$$=(b-a)\sup|G'|.$$

略加证明即可得 G 的全变差是 $\int_a^b|G'(x)|dx$。

这一例子有很自然的推广．设对函数 G 存在常数 M，使

$$|G(x)-G(y)|\leqslant M|x-y|,$$

则称函数 G 满足 **Lipschitz 条件**。显然，这一函数是一致连续的，并且是有界变差的。

例 6 本例介绍有界变差函数的弧长。在 R^k 中的**道路**是从某一闭区间到 R^k 中的一个连续映射：

$$[a, b]\xrightarrow{G}R^k.$$

道路可以是相当古怪的，但是对有界变差函数 G 却并不如此。这时，我们把 G 叫做**可求长的道路**（或者，有有限长的道路），并定义

$$(G)\text{的长度}=V_a^b(G).$$

从图 17 可看出定义的由来．在讨论可求长性时，把 G 的象看成曲线，当 t 在 $[a, b]$ 中变化时，点 $G(t)$ 描出一条曲线。一般，曲线可以和自己相交，也可以跑回来，还可以几次走过某一段，因此，我们把 G 叫做道路而不是把 G 的象当作道路。在 G 是一一对应时，道

路的长(即 G 的变差)就是该曲线 $G([a, b])$ 的长。

例 7 设 g 是增加(非减)实值函数，则 g 是有界变差的，并且

$$V_a^b(g) = g(b) - g(a).$$

这从(4.37)中的和式即可得出，并且和的值为 $g(b) - g(a)$。类似地，任一减少函数是有界变差函数。任一个有界变差的实值函数是一个增加函数和减少函数的和：

$$g = V_g + (g - V_g). \tag{4.41}$$

我们已经知道 g 的变差(4.40)是增加函数，而 $(g - V_g)$ 是减少函数，简单地说就是

$$g(t) - g(x) \leqslant V_x^t(g), \quad x \leqslant t.$$

例 8 连续但不是有界变差函数的例子是

$$g(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad 0 < x \leqslant b,$$

$$g(0) = 0.$$

从图 13 看到，这一函数的图振动得太厉害了，因而不能有有限长。在点 $2/\pi$, $2/3\pi$, $2/5\pi$, $\cdots$, 函数 g 的值是 $2/\pi$, $-(2/3\pi)$, $2/5\pi$, $-(2/7\pi)$, $\cdots$。计算相邻两点间的距离，得到

$$V_0^b(g) \geqslant \frac{2}{\pi}\left[\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \cdots\right].$$

所以 g 不是有界变差的。

现在，设 G 是 $[a, b]$ 上的函数，f 是 $I = [a, b]$ 上的实(或复)值函数。若 G 是 I 到 R^k 中的映射，f 就取为实值，若 G 是 I 到 C^k 中的映射，f 取复值。对划分 $P = (x_0, \cdots, x_n)$ 和点 $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ 作和

$$S(f, P, T, G) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[G(x_k) - G(x_{k-1})]. \tag{4.42}$$

如果极限

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(f, P, T, G)$$

存在，就用$\int_I fdG$来记，并说 Riemann-Stieltjes 积分$\int_I fdG$存在。设$\sum_\delta(f, G)$是和式(4.42)所成的集，而划分的网眼不超过δ。则积分存在的充要条件是

$$\lim_{\delta\to 0} \operatorname{diam} \sum_\delta(f, G) = 0.$$

并且，当这条件满足时，有

$$\int_I fdG = \bigcap_{\delta>0} \sum_\delta.$$

这一积分存在时，也记作

$$\int_a^b f(x)dG(x).$$

定理 14 设f是连续的，G是有界变差的，则 Riemann-Stieltjes 积分

$$\int_I fdG = \int_a^b f(x)dG(x)$$

存在。事实上，设P是网眼不超过δ的划分，任一和式(4.38)都必满足

$$\left|\int_I fdG - S(f, P, T, G)\right| \leqslant \omega(f, 2\delta)V^b_a(G).$$

证明 定理的证明实际上和$g(x)=x$的情形一样，只不过在估计过程中把$(x_k - x_{k-1})$换成$|G(x_k) - G(x_{k-1})|$就行了。

当F是从$[a, b]$到$R^m(C^m)$的连续函数，而g是实值（复值）有界变差函数时，对于积分

$$\int_I Fdg = \int_a^b F(x)dg(x)$$

也有同样的结果。

定理 15（分部积分，弱形式） 设f和g是$[a, b]$上有界变差

且连续的函数，则

$$(4.43)\quad \int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x).$$

证明 设 $P=(x_0, \cdots, x_n)$是$[a, b]$的划分，有

$$f(x_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]+[f(x_k)-f(x_{k-1})]g(x_{k-1})$$
$$=f(x_k)g(x_k)-f(x_{k-1})g(x_{k-1}).$$

对 $k=1, \cdots, n$ 求和，令划分的网眼趋于 0 即可得证.

例 9 对每一个连续函数 f，设 g 是 C^1 类函数，则有

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx,$$

因此，关于 g 的 Riemann-Stieltjes 积分在此情形下并非新型的，从近似和中就可看出这一点. 设 $P=(x_0, \cdots, x_n)$ 是 $[a, b]$ 的划分，$T=(t_1, \cdots, t_n)$是任选的点，$t_k\in[x_{k-1}, x_k]$，则

$$\sum f(t_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^n f(t_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k} g'(t)dt$$
$$= \int_a^b f_{PT}(t)g'(t)dt,$$

式中 f_{PT} 是阶梯函数，它在划分 P 的第 k 个子区间上取常数值 $f(t_k)$：

$$f_{PT}(t)=f(t_k), \quad x_{k-1}\leqslant t\leqslant x_k.$$

对连续函数 f，当 $\|P\|\to 0$ 时，f_{PT} 一致收敛于 f：

$$\lim_{\|P\|\to 0}\|f-f_{PT}\|_\infty = 0.$$

因此，当 P 的网眼趋于 0 时，Riemann-Stieltjes 和收敛于

$$\int f(t)g'(t)dt.$$

例 10 令

$$f(x)=\frac{1}{2}\frac{x}{|x|}, \quad x\neq 0.$$

$$f(0)=0$$

在任何区间$[-b, b]$，f 是有界变差的．设 g 是连续的，则

(4.44) $$\int_{-b}^{b} g(x)df(x)=g(0).$$

这里没有用到 $f(0)$，可以任意定义 $f(0)$．而所使用的划分不以0为分点．f 的"导数"，Dirac 把它叫做"δ 函数"．当然，在0处 f 不可微．如果 f 有这样一个导数，使对一切连续函数 g 它满足

$$\int_{-b}^{b} g(x)f'(x)dx=g(0).$$

现在，对 $x\neq 0$，$f'(x)=0$．但是 $\int_{-b}^{b} f'=1$．所以 $f'(0)=\infty$．而这样的函数 f' 是没有的，Dirac 的"δ 函数"是指 df 的积分过程．

例 11 看一下第3章例24的 Cantor 函数，它是区间$[0, 1]$上的连续函数，并且

(i) f 是增加的(非减的)；

(ii) $f(0)=0$，$f(1)=1$；

(iii) 从$[0, 1]$去掉 Cantor 集所得的余集，在组成余集的每一个区间上 f 是常数．

于是任一积分 $\int g df$ 仅决定于 g 在 Cantor 集上的性质，但是比起例9来，情况要复杂得多．

设 G 是有界变差函数：

$$[a, b]\xrightarrow{G} R^m.$$

对区间 $I=[a, b]$ 上的每一个实连续函数 f，Riemann-Stieltjes 积分 $\int f dG$ 存在，并有性质：

(i) $\int_I (cf+g)dG=c\int_I f dG+\int_I g dG$；

(ii) $\left|\int_I f dG\right|\leqslant V_a^b(G)\sup_I |f|$.

在有些数学分支中用到反过来的形式。设有一个函数 L，它把 I 上的每一个连续函数 f 映射成 R^m 中的一个向量 $L(f)$，L 具有两个性质：

(i) L 是线性的，也就是，$L(cf+g)=cL(f)+L(g)$；

(ii) 存在常数 $M>0$，对 I 上的每一个连续函数 f 有

$$|L(f)|\leqslant M\sup_I|f|.$$

则存在从 I 到 R^m 中有界变差函数 G，使对每一个 f 有

$$L(f)=\int_I f\,dG.$$

我们不打算在此证明这个结论。

读者也许已经注意到我们讨论过的 Riemann-Stieltjes 积分的方式，从而知道可以用同样的方法引进其它的积分。例如，若 F 和 G 是 $k\times k$ 矩阵值函数，F 是连续的，而 G 是有界变差的，则矩阵

$$\int F\,dG$$

有定义（注意，它和 $\int(dG)F$ 不同）。关于这些，我们不打算多谈，只说几句。在用和式

$$\sum_{\kappa=1}^{n}F(t_\kappa)[G(x_\kappa)-G(x_{\kappa-1})]$$

定义积分 $\int F\,dG$ 时，可以用种种不同的乘法，也就是在和式中的积有种种不同的解释。设

$$[a,\ b]\xrightarrow{F}R^m,$$

$$[a,\ b]\xrightarrow{G}R^k,$$

并设在 R^m 中向量与 R^k 中向量的“乘法”是：

$$R^m\times R^k\xrightarrow{M}R^p.$$

假定

(i) M 是线性的，也就是对固定的 y，$M(x, y)$ 是 x 的线性函数，固定 x 时，$M(x, y)$ 是 y 的线性函数。

(ii) $|M(x, y)| \leqslant |x||y|$。

若 F 是连续的，而 G 是有界变差的，则由我们已给出的证明可知

$$(4.45) \qquad \int_a^b M(F(x), dG(x)) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_k M(F(x_k), G(x_k) - G(x_{k-1}))$$

存在。积分 $\int M(F, dG)$ 是 F 和 G 的双线性函数，并且

$$(4.46) \qquad \left|\int M(F, dG)\right| \leqslant \int |F| dV_G.$$

习 题

1. 设 G 是 $[a, b]$ 上的有界变差函数，则在 $[a, b]$ 的每一点，G 有左极限和右极限(先对实值函数证明)。

2. 若 G 是有界变差的，则 G 只有可列个不连续点。

3. 设 G 是有界变差的，则 $\int f dG$ 与 G 在 $[a, b]$ 内部的不连续点的值无关。

4. 设 f 是 $[a, b]$ 上的 C^1 类函数，则

$$\int G df = \int G f'.$$

5. 设 f 是 $[a, b]$ 上有界变差且连续的函数，若 $f(a) = 0$，则

$$f(x) = \int_a^x df(t).$$

这个命题正确吗？

6. 证明，若 Q 是 P 的加细，则对 $[a, b]$ 上的一切函数 G，有

$$V(Q; G) \leqslant V(P; G).$$

7. 若 G 是连续且有界变差的函数，证明

$$\lim_{\|P\| \to 0} V(P; G) = V_a^b(G).$$

8. $[a, b]$ 上的凸函数是有界变差函数吗？

9. 设 f 是一一对应的有界变差函数：

$$[a, b] \xrightarrow{f} [c, d],$$

反函数 f^{-1} 是有界变差函数吗?

10. 设 f 是$[a, b]$上的可微函数,若 f' 是有界变差的,证明 f' 是连续的。

11. 设 g 是$[0, 1]$ 上的函数,定义如下:当 x 是无理数或零时,$g(x)=0$,当 $x\neq 0$, x 是有理数,并且 $x=p/q$(p, q 无公因子)时,$g(x)=q^{-3}$。证明 g 是有界变差函数,$\int f dg$ 是什么?

12. 设 f 是有界变差的,G 是有界变差且连续的函数,则 Riemann-Stieltjes 积分$\int f dG$ 存在。

13. 设 g 是$[a, b]$上的增加函数,

$$\int_a^b dg=1.$$

若F是从$[a, b]$到 R^m 中的连续函数,则 $\int F dg$ 在F值域的闭凸包中(集的闭凸包是包含该集的最小闭凸集)。

*14. (中值定理)设 F, g 是习题 13 中的函数,则存在 $[a, b]$ 中的点 $t_1, \cdots, t_k$ 和数 $C_1, \cdots, C_k$,使

$$\int F dg=C_1F(t_1)+\cdots+C_kF(t_k), \quad C_j\geqslant 0, \quad \sum_j C_j=1.$$

15. (Jensen)设 g 是$[a, b]$ 上的增加函数,$g(b)-g(a)=1$,ϕ 是实直线上的连续凸函数,f 是$[a, b]$上的任一实值连续函数,则

$$\int(\phi\circ f)dg\geqslant\phi\left(\int f dg\right).$$

(提示:令 $t=\int f dg$。存在一条通过$(t, \phi(t))$ 的直线,而 ϕ 的图象在直线上面。写出这条直线方程并求积分。)

16. 在某些条件下,利用习题 15 证明

$$\int e^f dg\geqslant\exp\left(\int f dg\right).$$

并由此证明算术平均超过几何平均:

$$\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)\geqslant(a_1\cdots a_n)^{1/n}.$$

(提示:选择 n 个点 $t_1, \cdots, t_n$,使在每一个点 t_k, g 跳跃 $1/n$)。

第5章 函数序列

5.1 收敛性

假定有一列具有公共定义域D的函数序列F_n，D可以是任意集合。我们要指出序列$\{F_n\}$收敛的含义，从根本上来说就是函数值序列收敛。因此我们最好还是假定所有函数都映射到同一个Euclid空间中：

(5.1) $$D \xrightarrow{F_n} R^m,$$

假定我们在D中任意固定一点x，那末$\{F_n(x)\}$是R^m中的一个点列，我们可以讨论这个序列是否收敛的问题。

定义 对于(5.1)中的函数序列$\{F_n\}$，如果对D中任意一点x，序列$\{F_n(x)\}$收敛，就说$\{F_n\}$**点态收敛**。若$\{F_n\}$点态收敛且

$$F(x)=\lim_n F_n(x), \quad x\in D,$$

则(F是D上的函数)我们说$\{F_n\}$**点态收敛于(函数)F**，并写成

$$F=\lim_n F_n.$$

许多函数列的收敛性读者是熟悉的，例如：

$$f_n(x)=x^{1/n}, \quad x\in R_+,$$

$$\lim_n f_n=1;$$

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k, \quad x\in R.$$

$$\lim_n p_n=e^x,$$

$$F_n(A)=\sum_{k=0}^{n}A^k, \quad |A|<1,$$

$$\lim_n F_n(A)=(I-A)^{-1}.$$

在 R^m 中的向量 $y=(y_1, \cdots, y_m)$ 是什么？它是集 $\{1, 2, \cdots, m\}$ 上的实值函数：

$$y(k)=y_k.$$

所以，R^m 中向量 y_n 的序列是具有公共定义域

$$D=\{1, 2, \cdots, m\}$$

的函数序列 $y_n=(y_{n1}, \cdots, y_{nm})$，而且这些函数是点态收敛的当且仅当在 R^m 中向量的序列 $\{y_n\}$ 收敛。

函数的点态收敛性似乎是很自然的，读者可能感到有点奇怪，为什么我们还要对它讨论得这样麻烦。我们这样做不仅因为它是基本概念，同时也因为我们希望着重指出它的局限性。我们希望从函数 F_n 的性质得到 $F=\lim_n F_n$ 的性质。例如，若每一个 F_n 是连续的，我们希望 F 也是连续的。我们也想建立某些运算的连续性（交换两个极限的次序），例如

$$\int F=\lim_n \int F_n.$$

但是点态收敛性条件还不够强，不能得到这些方面的肯定结论，因此有必要介绍更强的收敛方式。

定义 如果对任一 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得

$$|F(x)-F_n(x)|<\varepsilon, \ n>N, \ x\in D,$$

就说函数序列 $\{F_n\}$ **一致收敛**于（函数）F。

换句话说，如果对充分大的 n，对定义域中一切 x，$F_n(x)$ 一致地靠近 $F(x)$，就说 F_n 一致收敛于 F。然而，点态收敛的意思是，给定 $\varepsilon>0$，给定 x，存在正整数 $N_{x,\varepsilon}$，使得

$$|F(x)-F_n(x)|<\varepsilon, \quad n>N_{x,\varepsilon}.$$

收敛性是一致的当且仅当整数 $N_{x,\varepsilon}$ 可以选成与 x 无关，也就是当

且仅当$\{N_x, \varepsilon; x\in D\}$是有界的(对每一$\varepsilon>0$)。

对一致收敛，利用上确界范数的记号是方便的。上确界范数是：

$$D \xrightarrow{F} R^m,$$

$$(5.2) \qquad \|F\|_\infty = \sup\{|F(x)|; x\in D\}.$$

我们将在第6章中说明这一记号中用足标"∞"的理由。有时还需要讨论$|F|$在D的子集K上的上确界，并写作

$$\sup_K |F| = \sup\{|F(x)|; x\in K\}$$

在这一记号下，

$$\|F\|_\infty = \sup_D |F|.$$

假如$\{F_n\}$是有公共定义域的一个序列，若数列$\{\|F_n\|_\infty\}$有界，我们就说序列是**有界**的。

显然，F_n一致收敛于F当且仅当

$$\lim_n \|F - F_n\|_\infty = 0.$$

为了掌握一致收敛性，应清楚地记住某些图象，即以F为中心由上确界范数所定义的ε-球$\{G; \|F-G\|_\infty<\varepsilon\}$的图象。设$f$是实直线(的一个子集)上的实值函数，"关于$f$的一致$\varepsilon$球"是由函数$g$所组成，而$g$的图象是落在$f$图象的带状范围中(见图18)。

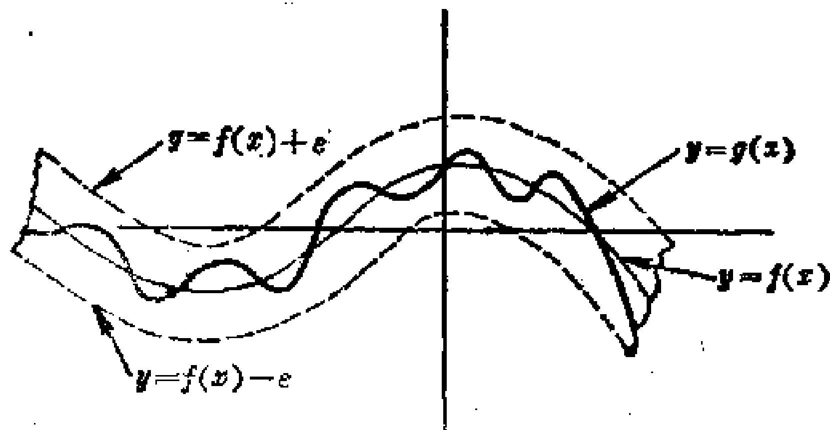


图 18

例 1　这是一个基本而又重要的例子。设在实直线上 f_n 定义为：

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{n}, \\ n-n^2\left(x-\dfrac{1}{n}\right), & \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant \dfrac{2}{n}, \\ 0, & \text{其余点}. \end{cases}$$

换句话说，f_n 是帐篷形的函数，它在区间 $[0, 1/n]$ 上线性地从 0 上升到 n，而在 $[1/n, 2/n]$ 上从 n 线性地下落到 0，在其余地方则为 0。序列 $\{f_n\}$ 点态收敛于 0，然而它不是一致收敛的，因为

$$\|0-f_n\|_\infty=\|f_n\|_\infty$$

不是有界的，当然更不趋于 0 了。但需注意，缺少有界性并非缺少一致性的关键因素。帐篷形函数 $g_n=(1/n)f_n$ 是点态收敛于 0 的有界序列，对一般 n，$\|g_n\|_\infty=1$。参见图 19。

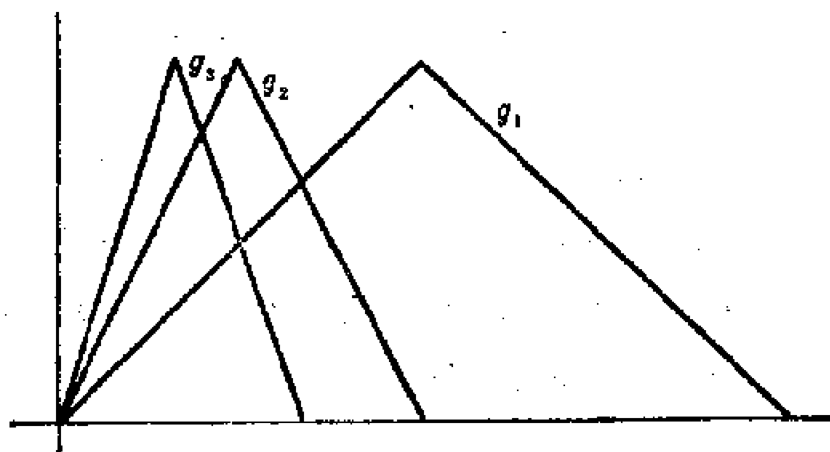


图 19

例 2　设 h_n 是实直线上的实值函数

$$h_n(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant n, \\ x-n, & n\leqslant x\leqslant n+1, \\ 1, & x\geqslant n+1, \end{cases}$$

则 $\{h_n\}$ 是有界的；$h_1\geqslant h_2\geqslant h_3\geqslant\cdots$；$h_n$ 点态收敛于 0，但是不一致收敛。

例 3 多项式

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k,\quad x\in R,$$

收敛于指数函数。它一致收敛吗？由于

(5.3) $$|e^x-p_n(x)|\leqslant\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}|x|^k.$$

在任一区间$[-b, b]$上，因为

$$\sup_{[-b,b]}|e^x-p_n|\leqslant\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}b^k.$$

所以是一致收敛的，但是在R上是不一致收敛的，因为（对每一n），

$$\lim_{x\to\infty}|e^x-p_n(x)|=\infty.$$

对于我们要做的许多事情来说，在紧子集上一致收敛就足够了。

例 4 设F是区间$[0, 1]$到R^m中的连续函数，n是正整数，用分点

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ 1,$$

把$[0, 1]$划分成长度相同的n个子区间。定义

$$F_n(t)=\begin{cases}F\left(\dfrac{k}{n}\right), & \dfrac{k-1}{n}<t\leqslant\dfrac{k}{n},\\ F\left(\dfrac{1}{n}\right), & t=0.\end{cases}$$

于是F_n是“阶梯函数”，它在区间$\left[0, \frac{1}{n}\right]$上取常数值$F\left(\frac{1}{n}\right)$，在区间$(1/n, 2/n]$上取常数值$F(2/n)$，等等。我们断定$\{F_n\}$一致收敛于$F$。令$\varepsilon>0$，由于$F$在$[0, 1]$上连续，因此$F$是一致连续的，从而存在$\delta>0$，使得

$$|F(x)-F(t)|<\varepsilon,\quad |x-t|<\delta.$$

令N是使$1/N\leqslant\delta$的任一正整数，则

$$\|F-F_n\|_\infty\leqslant\varepsilon,\quad n\geqslant N$$

这是为什么？设 t 是[0，1]中任一点，n 是大于N的任一整数，如果 $t\neq 0$，则 t 必属于某一个区间$[(k-1)/n, k/n]$，并且 $F_n(t)=F(k/n)$，因为 $|t-(k/n)|<1/n<\delta$，所以

$$|F(t)-F_n(t)|=\left|F(t)-F\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

并且 $|F(t)-F(k/n)|<\varepsilon$。于是对一切 $n\geqslant N$ 和一切 $t\in[0,1]$ 得到

$$|F(t)-F_n(t)|<\varepsilon.$$

引理 设$\{F_n\}$是从集D到 R^m 的函数序列。

(i) $\{F_n\}$ 点态收敛于某个从D到 R^m 的函数 F 当且仅当对D中每一个x，$\{F_n(x)\}$是 Cauchy 序列。

(ii) $\{F_n\}$一致收敛于某个从D到 R^m 的函数F当且仅当

$$\lim_{k,n}\|F_k-F_n\|_\infty=0.$$

证明 对上述两种情况都只需对结论中"当"的部分作出说明。

(i) 设$x\in D$，如果$\{F_n(x)\}$是 Cauchy 序列，由 R^m 的完备性，$\{F_n(x)\}$收敛于 R^m 中一个向量，记作 $F(x)$。若对每一个 x，Cauchy 条件成立，则对D中每一个 x 有一个 R^m 中的向量 F，满足

$$F(x)=\lim_n F_n(x).$$

(ii) 条件

$$\lim_{k,n}\|F_k-F_n\|_\infty=0$$

指出，对给定 $\varepsilon>0$，存在正整数 N_ε，对一切 k，$n\geqslant N_\varepsilon$ 和一切 $x\in D$，使得

$$|F_n(x)-F_k(x)|<\varepsilon,$$

换句话说，$\{F_n(x)\}$是 Cauchy 序列，并且有一个与 x 无关的收敛

速度。令 $F(x)=\lim_n F_n(x)$，则对一切 $k\geqslant N_\varepsilon$ 和一切 $x\in D$ 有

$$|F(x)-F_n(x)|\leqslant\varepsilon.$$

也就是

$$\|F-F_k\|_\infty\leqslant\varepsilon,\quad k\geqslant N\varepsilon.$$

例 5 Weierstrass 在很早以前就注意到一个基本的（但是特殊的）情况，就是函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}F_n$$

的一致收敛性。设

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|F_n\|_\infty<\infty,$$

于是对部分和

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}F_k,$$

有

$$\|S_n-S_k\|_\infty\leqslant\sum_{k+1}^{\infty}\|F_j\|_\infty,\quad k\leqslant n.$$

根据上述引理，$\{S_n\}$ 一致收敛于 S：

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(x).$$

在某些重要条件下，由点态收敛性可推出一致收敛性。

定理 1(Dini) 设 D 是 R^n 中紧集，$\{f_n\}$ 是 D 上连续的单调下降实值函数序列：

$$f_1\geqslant f_2\geqslant f_3\geqslant\cdots$$

若 f_n 点态收敛于 0，则 f_n 一致收敛于 0。

证明 令 $\varepsilon>0$，设

$$U_n=\{x\in D;\ f_n(x)<\varepsilon\}$$

因为 f_n 连续，故 U_n 相对于 D 是开的，由于 $f_n\geqslant f_{n+1}$，所以

$$U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots$$

$\{U_n\}$是D的一个覆盖。为什么？若x在D中，则$f_n(x)$收敛于0；特别是，对某一个n，$f_n(x)<\varepsilon$，即x在U_n中。由于D是紧集而U_n是增加的，必有某个U_N覆盖D，也就是对某个N，$U_N = D$。因而我们有

$$0 \leqslant f_n < \varepsilon, \quad n > N.$$

系 设$\{f_n\}$是紧集D上的非负连续函数序列，对每个$x \in D$有

$$\sum_n f_n(x) < \infty,$$

且函数

$$f = \sum_n f_n \tag{5.4}$$

是连续的，则级数(5.4)一致收敛。

在Dini定理中，单调收敛性和定义域为紧的假设是有决定性的，但是这样强的条件难以常常遇到。在例1中，连续函数f_n和g_n都点态收敛于0，但它们都不是一致收敛的，在例2中，序列单调收敛于0，但定义域不是紧集，也不一致收敛。在系中，由于条件$f_k \geqslant 0$保证了部分和序列S_n的单调性，这里$S_n = \sum_{1}^{n} f_k$。先决条件为$f = \lim_n S_n$是连续，于是才保证可以把Dini定理应用于$\{f - S_n\}$。

例6 设

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

下面是构造一致收敛于f的多项式序列的方法。定义

$$f_0 = 0$$

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}[x - f_n(x)^2], \quad n \geqslant 0. \tag{5.5}$$

现在验证：

(i) f_n 是多项式函数；

(ii) $0\leqslant f_n\leqslant f$.

显然，若 f_n 是多项式函数，则 f_{n+1} 也是多项式函数。我们用数学归纳法验证(ii)。对 $n=0$，(ii)当然成立，设对 $n=k$ 也成立，从(5.5)将有

$$f_{k+1}\geqslant f_k\geqslant 0.$$

现在

$$\begin{aligned} f_{k+1}&=f_k+\frac{1}{2}(f^2-f_k^2)\\ &=f_k+\frac{1}{2}(f+f_k)(f-f_k)\\ &\leqslant f_k+f\cdot(f-f_k), \end{aligned}$$

并且(由于在紧区间[0, 1]上) $f\leqslant 1$，于是

$$f_{k+1}\leqslant f_k+(f-f_k)=f.$$

从而，$\{f_n\}$ 是[0,1]上的单调增加的连续函数序列，它是上有界的，被 f 所控制：

$$0\leqslant f_n\leqslant f_{n+1}\leqslant f.$$

故 $\{f_n\}$ 点态收敛。若 g 是极限函数，则(5.5)说明

$$g=g+\frac{1}{2}(f^2-g^2).$$

于是 $g=f$。因为 f 连续，$\{f-f_n\}$ 是[0, 1]上的连续函数序列，它单调地点态收敛于0。根据 Dini 定理，收敛性是一致的。

习　题

1. 设 D 是非空集，f 是 D 上复值函数，对每一 $x\in D$ 满足

$$|f(x)|<1,$$

证明幂的序列 $\{f^n\}$ 点态收敛于 D 上的零函数。证明 f^n 是一致收敛于零的充要条件是

$$\sup_D |f| < 1.$$

2. 设D是正整数集，D上函数序列$\{f_n\}$定义为：

$$f_n(k) = \frac{n-k}{n+k}.$$

证明$\{f_n\}$点态收敛于(常数函数)1。这个函数序列$\{f_n\}$一致收敛吗？

3. 作一个实直线R上的连续函数序列$\{f_n\}$，使得

(i) $\{f_n\}$点态收敛于0；

(ii) 函数f_n中没有一个是有界的。

4. 若$\{F_n\}$是一致收敛的函数序列，则$\{F_n\}$必是有界序列吗？

5. 设$x \in R$，对哪一些x，$\lim_n \cos nx$存在？

6. 设

$$f_n(x) = \int_0^x e^{int} dt, \quad x \in R.$$

则在实直线上，序列$\{f_n\}$一致收敛于0。

7. 设f是定义在开单位圆盘$D = \{z \in C; |z| < 1\}$上的复值函数，

$$f(z) = (1-z)^{-1}, \quad z \in D.$$

令

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k,$$

于是我们知道f_n点态收敛于f。请说明f_n在D上的收敛性不是一致的，并证明在D的每一个紧子集上是一致的，即若$K \subset D$是紧的，则

$$\lim_n \sup_K |f - f_n| = 0.$$

8. 设$\{T_n\}$是从R^k到R^m中的线性变换序列。若$\{T_n\}$点态收敛于T，则

(i) T是线性变换；

(ii) 在R^k的每一个紧子集上，收敛性是一致的。

9. 对闭有界集上的函数证明 Dini 定理。请用 Bolzano-Weierstrass 定理而不要用 Heine-Borel 定理。

10. 设F_n，F是区间$[a, b]$上的有界变差函数，假如$V_a^b(F - F_n)$收敛于0，并且$F_n(a)$收敛于$F(a)$。证明$\{F_n\}$一致收敛于F。关于$F_n(a)$和$F(a)$的假定起什么作用？

11. 举出一个多项式序列$\{f_n\}$，使$\{f_n\}$在$[a, b]$上一致收敛于0，并且

$$\lim_n V_a^b(f_n) = \infty.$$

12. 设$\{p_n\}$是实直线上多项式函数序列。假如

(i) $\{p_n\}$点态收敛于函数f;

(ii) 次数 deg (p_n)是有界的。

证明f是多项式函数。提示：试证p_n中x的各次幂的系数是收敛的。

13. (Abel 引理)设ΣV_n是R^m中向量级数，级数的部分和在凸集K中。设$c_1 \geqslant c_2 \geqslant \cdots \geqslant 0$是非负实数的递减序列。证明级数$\Sigma c_n v_n$的部分和在集$c_1 K$中。

14. (Abel 定理)设$\{F_n\}$是从集D到R^m中的函数序列，令$p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant 0$是$D$上非负函数的递减序列。又设级数$\Sigma F_n$一致收敛，并且序列$\{p_n\}$是有界的（即$p_1$是有界的）。利用 Abel 引理（习题 13）证明级数$\Sigma p_n F_n$一致收敛。

15. (Dirichlet-Hardy)设$\{F_n\}$是集D到R^m中的函数序列，$p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant 0$是$D$上非负函数的递减序列。级数$\sum_n F_n$的部分和是有界的（在上确界范数下），又设序列$\{p_n\}$一致收敛于 0，则级数$\Sigma p_n F_n$一致收敛。

5.2 运算和收敛性

现在我们讨论这样一些问题，从中将看到引进一致收敛概念的原动力。

定理 2 设$\{F_n\}$是连续函数序列

$$D \xrightarrow{F_n} R^m, \quad D \subset R^n,$$

若F_n一致收敛于F，则F是连续的。

证明 证明的思想是：对每一个n，有

$$F(x) - F(x_0) = F(x) - F_n(x) + F_n(x) - F_n(x_0) + F_n(x_0) - F(x_0). \tag{5.6}$$

对充分大的n，$F_n(x)$靠近$F(x)$，$F_n(x_0)$靠近$F(x_0)$，（由于F_n是连续的）当$|x - x_0|$充分小时，$F_n(x)$将靠近$F_n(x_0)$。下面要把“靠近”精确化。

设$x_0 \in D$，对$\varepsilon > 0$，选择一个特殊的正整数N，使得

$$\|F-F_N\|_\infty<\frac{\varepsilon}{3}.$$

从(5.6)得到

(5.7) $$|F(x)-F(x_0)|<\frac{2\varepsilon}{3}+|F_N(x)-F_N(x_0)|.$$

由于 F_N 在 x_0 连续，所以存在 $\delta>0$，使得

$$|F_N(x)-F_N(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}, \quad |x-x_0|<\delta.$$

这一 δ 依赖于 ϵ, x_0 和 N)，从(5.7)就得到

$$|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon, \quad |x-x_0|<\delta.$$

系 设

$$D\xrightarrow{F_n}R^m, \quad D\subset R^k,$$

且 x_0 是 D 的一个聚点。假设

(i) 每一个 F_n 在 x_0 有极限；

(ii) F_n 一致收敛于 F。

则 F 在 x_0 有极限，且

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=\lim_n\lim_{x\to x_0}F_n(x).$$

证明 读者应能看出，这是上一定理的系。回顾一下定理的证明是有益的，系和定理的证明从根本上说是相同的：设 l_n 是 F_n 在 x_0 的极限，则 $|l_n-l_k|\leqslant\|F_n-F_k\|_\infty$，于是 l_n 收敛于 R^m 中的点 l，并且

$$|l-F(x)|\leqslant|l-l_n|+|l_n-F_n(x)|+|F_n(x)-F(x)|$$

其余的证明和前面一样。

系指出在一致收敛情况下可以交换两个极限的次序（在某些条件下）。在这一节中，我们将一再重复这一事实，各种结果都是用这一个原理来说明的。

作为这一原理的第一个应用，我们假设有 R^m 中点的二重序列：

$$x_{nk}, \qquad n, k=1, 2, 3, \cdots$$

作为描述性的语言，不妨把$\{x_{nk}\}$看作无限矩阵

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}.$$

这是交换极限次序的问题，假如每一行收敛和每一列收敛：

$$\text{对每一个 } n, \ A_n = \lim_k x_{nk} \text{ 存在}$$

$$\text{对每一个 } k, \ B_k = \lim_n x_{nk} \text{ 存在。}$$

在什么情况下可以得出 $\lim\limits_n A_n$ 和 $\lim\limits_k B_k$ 存在并且相等呢？显然，一般是不行的，例如下面的三角矩阵就不行：

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}.$$

但是，当行或列一致收敛时这个结论是成立的（对一切行或列）。

定理 3（Moore-Osgood 二重极限定理） 设 $\{x_{nk}\}$ 是 R^m 中向量的二重序列。假设

（i） 对每一个n，第n行收敛

$$A_n = \lim_k x_{nk};$$

（ii） 对每一个k，第k列收敛

$$B_k = \lim_n x_{nk};$$

（iii） 任一行或任一列的收敛性是一致的（对n或k）。则 $\lim\limits_n A_n$ 存在，$\lim\limits_n B_k$ 存在，并且这两个极限相等。若x是它们的

公共极限值，则二重序列$\{x_{nk}\}$收敛于x：

$$\lim_{n,k}|x-x_{nk}|=0.$$

证明 设行的极限A_n存在，并且对k一致地存在列的极限B_k. 后一条件表示，对每个$\varepsilon>0$，存在N，对一切$n\geqslant N$和对一切k，使得

$$|B_k-x_{nk}|<\varepsilon.$$

函数

$$Z_+\xrightarrow{F_n}R^m,$$

$$F_n(k)=x_{nk}$$

一致收敛于函数F，$F(k)=B_k$. 并且每一个F_n在∞都有极限

$$\lim_{k\to\infty}F_n(k)=A_n.$$

除了"聚点"是∞外，已满足上面系的条件. 读者可以用同样的方法证明在∞时，上面的系仍成立. 因此我们得到

$$\lim_n A_n=\lim_k B_k.$$

若x是这两个极限的公共值，则

$$|x-x_{nk}|\leqslant|x-B_k|+|B_k-x_{nk}|.$$

对给定$\varepsilon>0$，选择N，使对$n\geqslant N$，对一切k有$|B_k-x_{nk}|<\varepsilon/2$. 再选择$K$，使对$k\geqslant K$有$|x-B_k|<\varepsilon/2$. 令$M=\max(K,N)$，则当$n$，$k\geqslant M$时，

$$|x-x_{nk}|<\varepsilon.$$

关于二重极限定理还要说几句，可以用Cauchy准则的术语来重新叙述收敛性. 例如，若$\{x_{nk}\}$对每一个固定的k，当$n\to\infty$时对k一致地是Cauchy序列，则

$$\lim_n\lim_k x_{nk}=\lim_k\lim_n x_{nk}=\lim_{n,k}x_{nk}.$$

这一结论也可对二重无限级数$\sum x_{nk}$来叙述. 我们早已学习过最重要的特殊情况——绝对收敛性. 我们曾证明，若

$$\sum_{n,k}|x_{nk}|<\infty,$$

则

$$\sum_n\sum_k x_{nk}=\sum_k\sum_n x_{nk}.$$

因此可以明确地讨论级数

$$\sum_{n,k}x_{nk}.$$

读者把二重极限定理应用到序列

$$S_{nk}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}x_{ij},$$

就可以验证上述结论。绝对收敛性保证了矩阵 $\{S_{nk}\}$ 的行的和与列的和都是一致收敛的。

我们继续讨论一致收敛性的应用和极限运算的交换。

定理 4 设 $\{F_n\}$ 是 R^k 中闭长方体 B 上的连续函数序列，F_n 一致收敛于 F，则

$$\lim_n\int_B F_n=\int_B F.$$

证明 考虑

$$\left|\int_B F-\int_B F_n\right|\leqslant\int_B|F-F_n|$$
$$\leqslant\|F-F_n\|\ m(B).$$

结果看来似乎很平常。其实不然，因为我们需要用定理 2 来得到 F 是连续的，从而保证 F 可积。

定理 5 设 I 是实直线上的一个区间，令 $\{F_n\}$ 是从 I 到 R^m 的可微函数序列。假设

(i) F_n 收敛于 F；

(ii) 导数 F_n' 一致收敛，

则 F 是可微的，并且 $F'=\lim_n F_n'$.

证明 固定 $x\in I$，需要证明

$$(5.8)\qquad \lim_{t\to x}\lim_{n}\frac{F_n(t)-F_n(x)}{t-x}=\lim_{n}\lim_{t\to x}\frac{F_n(t)-F_n(x)}{t-x}.$$

根据以前用过的同样理由，这只要证明极限

$$\lim_{n}\frac{F_n(t)-F_n(x)}{t-x}=\frac{F(t)-F(x)}{t-x}$$

关于 t 一致地存在。这正是我们假定导数 F_n' 一致收敛的原因。我们需要证明，当 k, n 充分大时，

$$(5.9)\qquad \frac{F_n(t)-F_n(x)}{t-x}-\frac{F_k(t)-F_k(x)}{t-x}$$

关于 $t\neq x$ 一致地足够小。可以先对实值函数 f 证明这一事实，然后利用坐标就可得到。在实值情形，中值定理告诉我们(5.9)是

$$(f_n-f_k)'(c),$$

式中 c 在 t 和 x 之间。于是

$$\left|\frac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x}-\frac{f_k(t)-f_k(x)}{t-x}\right|\leqslant\|f_n'-f_k'\|_\infty.$$

这时，(5.8)就成立了。

当然，由定理 5 的假设可推出 F_n 一致收敛于 F。事实上，由 $\{F_n'\}$ 一致收敛和 $\{F_n(x)\}$ 在每一点收敛，容易得到 $\{F_n\}$ 一致收敛。

定理 5 告诉我们，在某些条件下可以在积分号下求微分：

系 设 I 是闭区间，B 是 R^N 中闭长方体，F 是 $I\times B$ 上的连续函数，偏导数

$$(D_1F)(x,X)=\lim_{t\to x}\frac{F(t,X)-F(x,X)}{t-x}$$

存在且在 $I\times B$ 上连续，则

$$G(t)=\int_B F(t,X)dX$$

是 I 上可微函数，并且

$$G'(t)=\int_B (D_1F)(t,X)dX.$$

证明 从定理 5 和积分的基本性质就可得到这一结果。要点

是 t 趋于 0 时，差商一致收敛于 D_tF。有些人喜欢把这结论写成

$$\frac{dG}{dt}=\int_B \frac{\partial F}{\partial t}\,dX.$$

如能明白它的含意，那末这种写法是很优美的。

习　　题

1. 设 $\{f_n\}$ 是一致连续函数的序列，f_n 一致收敛于 f，f 是一致连续函数吗？

2. 设 F_n 一致收敛于 F，G_n 一致收敛于 G，$\langle F_n, G_n\rangle$ 一致收敛于 $\langle F, G\rangle$ 吗？

3. 设 f 是区间 $[0, 1]$ 上的非负连续函数。假如序列 $f^{1/n}$ 一致收敛，f 有多少零点？

4. 设 f 和 g 是实直线上的连续函数，令

$$(f*g)(x)=\int_0^1 f(x-t)g(t)dt,$$

又设 $f\in C^\infty$ 类函数。$f*g$ 是 C^∞ 类函数吗？

5. 设

$$f(x, y)=\frac{x-y}{1-xy}, \quad x>1, \quad y>1.$$

则关于 y 一致地有

$$\lim_{x\to 1} f(x, y)=1,$$

这个结论对吗？关于 y 一致地有

$$\lim_{x\to\infty} f(x, y)=-\frac{1}{y},$$

这个结论对吗？

6. 设 $\{a_{kn}\}$ 是任一非负数的二重序列。如果允许出现 ∞，则

$$\sum_n\Big(\sum_k a_{kn}\Big)=\sum_k\Big(\sum_n a_{kn}\Big).$$

7. 设 $\{x_{nk}\}$ 是复数的二重序列

$$x_{nk}=\exp\Big(-n+\frac{1}{k}i\Big).$$

(a) Moore-Osgood 二重极限定理可以用到 $\{x_{nk}\}$ 上去吗？

(b) 二重级数 Σx_{nk} 绝对收敛吗？

8. 设$\{g_n\}$是 Riemann 可积函数序列，若

$$f_n(x)=\int_a^x g_n(t)\,dt,$$

并且$\{g_n\}$在$[a, b]$上一致收敛，则$\{f_n\}$在$[a, b]$上一致收敛。

9. 若f在D上连续，$\|f\|_\infty<1$，则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^n, \quad (f^0=1)$$

一致收敛于$1/(1-f)$。

10. 设F是实直线上的C^1类函数。证明：当t趋于0时，差商

$$\frac{F(x+t)-F(x)}{t}$$

收敛于$F'(x)$，在R的紧子集上，这收敛是一致的

*11. 假如对每一个$t\in[0, 1]$，可以定义D上的一个连续函数f_t，设从t到f_t的映射是连续的，其含义是，若t_n收敛于t，则f_{t_n}一致收敛于f_t，定义

$$\int_0^1 f_t\,dt$$

并讨论它。

5.3 实幂级数

在实直线上，除了多项式外，性质最好的实值函数就是那些能展开为幂级数的函数：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

我们已经讨论过一些这种函数：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n, \quad x\in R,$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad x\in R,$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, \quad x\in R,$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \quad |x|<1.$$

定义 设f是实直线的一个子集上的复值函数。我们称f为**实解析函数**，如果

（i） f的定义域是一个开集U；

（ii） 若$x_0\in U$，存在一个关于x_0的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,$$

并且这个幂级数在x_0的一个邻域中收敛于f。

换言之，实解析函数从局部来说是收敛幂级数的和。如果我们要知道这种函数的局部性质，只要研究一个收敛幂级数在一点的性质就可以了；而且，我们不妨考虑关于$x_0=0$的级数。

因此，如有数列a_0，a_1，a_2，…，它们也可以是复的。考虑幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n. \tag{5.10}$$

它对任一x收敛吗？显然，当$x=0$是收敛的，但这没有什么意义。设级数在某一$t\neq0$收敛，容易看出它一定也在区间$|x|<|t|$收敛。因为级数在$x=t$收敛，就有

$$\lim_{n}a_nt^n=0,$$

所以存在N，使当$n>N$时

$$|a_nt^n|\leqslant1.$$

于是，当$|x|<|t|$时，我们有

$$\sum_n a_nx^n=\sum_n a_n\left(\frac{x}{t}\right)^nt^n,$$

$$\begin{aligned}\sum_n|a_nx^n|&=\sum_{n=1}^{N}|a_nx^n|+\sum_{N+1}^{\infty}|a_nt^n|\left|\frac{x}{t}\right|^n\\&\leqslant\sum_{1}^{N}|a_nx^n|+\sum_{N+1}^{\infty}\left|\frac{x}{t}\right|^n.\end{aligned} \tag{5.11}$$

由于$|x/t|<1$，因而在开区间$|x|<|t|$的每一点，级数绝对收敛。并且，在区间的每一个紧子集上收敛性是一致的，这紧子集是$\{x;$

$|x|\leqslant c|t|\}$，式中 $0\leqslant c<1$。一致性从(5.11)易得。

对每一个形如(5.10)的幂级数，有一个**收敛半径**

$$r=\sup\{|t|;\ \sum a_n t^n \text{ 收敛}\}。$$

收敛半径具备这样一些性质：

(i) $0\leqslant r\leqslant\infty$；

(ii) 在区间 $|x|<r$ 的每一个紧子集上，级数一致收敛和绝对收敛。

(iii) 对于 $|x|>r$ 的任何 x，级数不收敛。

定理 6 设 r 是幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

的收敛半径，则

$$\frac{1}{r}=\limsup_n |a_n|^{1/n}, \tag{5.12}$$

证明 设级数在 $x=t$ 收敛，则有

$$|a_n t^n|\leqslant 1,\quad n>N。$$

于是

$$|a_n|^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{|t|},\quad n>N。$$

因此，若

$$L=\limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}},$$

我们就有

$$L\leqslant\frac{1}{r}。$$

现在要证明不等式 $r\geqslant\dfrac{1}{L}$。即要证明当 $0\leqslant t<1/L$ 时 $r\geqslant t$。为此，设 $0\leqslant t<1/L$，选择 $t<c<1/L$，根据上极限的定义，存在 N，使得

$$|a_n|^{1/n}\leqslant\frac{1}{c},\quad n>N.$$

于是

$$|a_n t^n|\leqslant\left(\frac{t}{c}\right)^n,\quad n>N.$$

因为 $t/c<1$，说明级数在 t 处收敛，因此 $r\geqslant t$。定理证毕。

设有收敛半径 $r>0$ 的幂级数，幂级数的和是函数 f：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\quad |x|<r. \tag{5.13}$$

则 f 必是连续的。这是因为多项式(部分和)

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k, \tag{5.14}$$

在 $|x|<r$ 的任一紧子集上一致收敛于 f。其实 f 是 C^∞ 类函数。理由是：形式上对级数(5.13)求导得到一个新的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}n a_n x^{n-1}. \tag{5.15}$$

因为

$$\lim_n n^{1/n}=1,$$

因此级数(5.15)和 f 的级数(5.13)有同样的收敛半径。所以，由求导所得级数的部分和在 $|x|<r$ 的紧子集上一致收敛。该部分和是

$$p_n'(x)=\sum_{k=0}^{n}k\, a_k x^{k-1}.$$

在每一个闭的有界子区间上，p_n 一致收敛于 f，p_n' 一致收敛。根据定理 5，f 可微，并且

$$f'(x)=\lim_n p_n'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n\, a_n x^{n-1}.$$

根据同样的理由，f' 是可微的，等等。

定理 7 每一个实解析函数 f 是 C^∞ 类函数。设在 x_0 的邻域

中，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,$$

则(在同一邻域中) f 的 n 次导数是由 f 的幂级数逐项进行 n 次求导所得幂级数的和。特别是

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

这看来可以使我们弄明白一个麻烦的技术问题。当我们定义实解析函数时，要求在它定义域(开的)的每一点可以展开为一个收敛的幂级数。然而并不能直接地把函数定义为具有这种性质的一个单一的收敛幂级数的和。我们需要验证的是，如果

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\qquad |x|<r,$$

并且 $t\in(-r,r)$，那么在 t 附近有一个$(x-t)$的幂级数，它收敛于 $f(x)$，这个级数的展开(应该)是

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^n.$$

它为什么成立呢?我们反复求导可得

$$f^{(n)}(t)=\sum_{k=n}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k t^{k-n},$$

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(t)=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}a_k t^{k-n}.$$

形式上，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}a_k t^{k-n}(x-t)^n\\&=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}t^{k-n}(x-t)^n\\&=\sum_{k=0}^{\infty}a_k[t+(x-t)]^k\\&=f(x).\end{aligned}$$

在二重级数绝对收敛情况下，这个计算将是正确的。用 $|a_k|$ 代替

a_n，用 $|t|$ 代替 t，用 $|x-t|$ 代替 $(x-t)$，可作出相应的计算。若

$$|t|+|x-t|<r,$$

级数就具有有限和，于是关于 t 的级数展开在区间 $|x-t|<r-|t|$ 上成立。

结论 设 f 是开集 U 上的复值函数，则 f 是实解析函数当且仅当定义域 U 可以被开集族所覆盖，而在每一开集上，f 是一个收敛幂级数的和。

现在，假如我们在 0 的邻域上给定一个函数 f，想知道在 0 的某个邻域上 f 是否能表示成一个收敛的幂级数的和：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

我们已经知道两件事情。第一，必须从 C^∞ 类函数出发，第二，系数只能是

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)。$$

所以，给定一个 C^∞ 类函数 f，我们写出形式级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n. \tag{5.16}$$

这一级数通常叫做函数 f 的 Taylor 级数。我们提出两个问题：

1. 级数(5.16)是否在任何 $x\neq 0$ 收敛？(即它是否在 0 的一个邻域内收敛？)

2. 若级数在 0 的一个邻域内收敛，它是否收敛于 f？

由定理 6 可得到问题(1)的回答：级数(5.16)对某些非零 x 是收敛的充要条件是

$$\limsup_n \left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\right|^{1/n}<\infty.$$

假如级数的收敛半径是正的，此级数仍然可以不收敛于 f。这种情况的典型例子是：

$$f(x)=\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),\quad x\neq 0,$$

$$f(0)=0.$$

这个 f 是实直线上的 C^∞ 类函数，并且

$$f^{(n)}(0)=0, \quad n=0, 1, 2, \cdots$$

由此得到的关于 $x=0$ 的级数展开一定收敛——但是并不收敛于 f（顺便说一句，在区间 $x>0$ 和 $x<0$，f 是实解析函数）。

Taylor 定理给出了一个实值函数用它的 Taylor 级数的部分和来逼近时所产生的误差的表达式。它指出，第 n 次余项

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k,$$

可以由下式给出：

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1},$$

式中 $0\leqslant\theta\leqslant1$。这可以由中值定理得到。我们还要用到余项的另一种形式，它不限于实值函数。

定理 8 设 f 是 0 的某一邻域内的 C^{n+1} 类复值函数，令

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k,$$

则

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(tx)(1-t)^n\,dt.$$

证明 设

$$g_k(x)=\frac{x^{k+1}}{k!}\int_0^1 f^{(k+1)}(tx)(1-t)^k dt, \quad k=0, \cdots, n.$$

分部积分后得到

$$g_k(x)=-\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+g_{k-1}(x),$$

$$g_0(x)=f(x)-f(0).$$

因此，$g_n(x)=R_n(x)$。

例 7 讨论函数

$$f(x)=\ln x, \quad x>0,$$

和它的幂级数，这是实解析函数。若 $x_0>0$，由于 f 在 $x=0$ 附近无界，因而在区间 $(0, 2x_0)$ 外面，我们不能指望关于 x_0 的幂级数

$$\sum_0^\infty \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

收敛。因为 $f'(x)=1/x$（第4章例1），

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, \quad n\geq 1.$$

于是关于 x_0 的形式级数是

$$\ln x_0+\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-x_0}{x_0}\right)^n.$$

这一级数的收敛半径显然是 x_0。为什么在 $(0, 2x_0)$ 上级数收敛于 $\ln x$ 呢？只要逐项微分这一级数，就可得到 $1/x$。

我们常常作出 $\ln$ 关于 $x=1$ 时的级数展开，这样更方便，并且写成

$$(5.17) \qquad \ln(1+x)=\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad |x|<1.$$

这一级数也可以对级数

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^\infty (-x)^n, \quad |x|<1,$$

直接逐项积分得到，由于 $(1+x)^{-1}$ 的级数在 $(-1, 1)$ 的紧子集上一致收敛，因而逐项求积是合法的。

例 8 很久以前，函数

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}, \quad x\in R,$$

被看作是神秘的。它是整个实直线上的实解析函数。我们如果把函数在 $x=0$ 处展开成幂级数，显然应得到

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^\infty (-x^2)^n, \quad |x^2|<1,$$

$$(5.18) \qquad \frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \quad |x|<1,$$

而且级数在 $x=1$ 或 $x=-1$ 并不收敛(因为一般项不趋于0)。为什么有这种情况呢？这一函数并不像函数 $\ln(1+x)$ 那样，它在端点的性质是不坏的，然而这一函数的幂级数在区间端点的性质却是坏的，这里我们只是从 x 的实值范围看问题。也可以对复的 x 得到 (5.18)，而在复平面上，$(1+x^2)^{-1}$ 并不是处处都有好的性质，例如在点 $x=\pm i$ 就不好。

习　题

1. 在 $x=1$ 展开 $(1+x^2)^{-1}$ 为幂级数。

2. 幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

的收敛半径是什么？

3. 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$$

的收敛半径是什么？

4. 证明 $\ln(1+x)\leqslant x$。

5. 设

$$f(x)=x^{1/3}, \qquad -1<x<1.$$

f 是 C^∞ 类函数吗？f 是实解析函数吗？

6. 举出实解析函数序列一致收敛于不是实解析函数的例子。

7. 设 f 是 0 的邻域上的实解析函数，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

定义

$$\| f \| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

若 $\| f_n - f_k \| \to 0$，在 0 的邻域上 $\{f_n\}$ 一致收敛吗？

8. 若 f 是实直线上的 C^∞ 类函数，$f(0)=0$。令

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f'(0), & x=0.\end{cases}$$

则 $g(x)$ 是 C^∞ 类函数。

9. 把习题 8 推广如下：若 f 是 C^∞ 类函数，那末或者对每一个 n 有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=0,$$

或者可以写成

$$f(x)=x^n g(x),$$

式中 g 是 C^∞ 类函数，且 $g(0)\neq 0$. 若 f 是实解析函数并且 $f\neq 0$, 则第一种情况不会发生。

10. 设 f 是包含原点的一个区间上的实解析函数，如果存在点列 $x_n\neq 0$, 使得

$$f(x_n)=0,\quad n=1,2,3,\cdots$$
$$\lim_n x_n=0,$$

证明 $f=0$。

11. 证明两个实解析函数的积是实解析函数. 提示：若在区间 $|x|<r$ 上

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\quad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n,$$

对区间 $(-r,r)$ 中的每一个 x, 证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}|a_k||b_{n-k}|\right)|x|^n<\infty.$$

12. 证明两个实解析函数的商在分母为零的集之外是实解析函数。提示：若 $g(0)=1$, 则

$$\frac{1}{g}=\frac{1}{1-h}$$

式中 $h(x)$ 在 $x=0$ 附近是小的。

13. 证明由实解析函数组成的复合函数是实解析函数。

5.4 多重幂级数

现在简要地讨论一下 n 个变量的幂级数以及能用这种级数来表达的函数。若采用适当的记号，n 个变量的情形并无新结果和

新技巧。

关于原点的 n 个变量的幂级数具有如下形式

$$\sum_{k_1,\cdots,k_n=0}^{\infty} a_{k_1},\cdots,{}_{k_n} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}, \tag{5.19}$$

式中每一个 $a_{k_1},\cdots,k_n$ 是一个复数。多重足标很不方便，因此，我们把(5.19)写成

$$\sum_k a_k x^k, \tag{5.20}$$

式中 $k=(k_1,\cdots,k_n)$ 是向量足标(n 重非负整数)，并且

$$x^k = x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n},$$

级数(5.20)中存在不确定情况，因为我们设有规定项的求和次序。但是由于对多重幂级数我们仅涉及在 R^n 中的集上的绝对收敛级数：

$$\sum_k |a_k x^k| < \infty, \tag{5.21}$$

因此，上述不确定情况对我们不会造成什么麻烦。其实，在(5.21)的意义下求和与项的次序无关，它表明存在数 $M<\infty$，使对(向量)指标 K 的任一有限集，有

$$\sum_{k\in K} |a_k x^k| \leqslant M.$$

在绝对收敛条件下，(5.20)的项可以按任意次序求和，它们的结果总是相同的。下面是许多人认为最自然的求和次序。

设

$$P_N(x) = \sum_{|k|=N} a_k x^k, \tag{5.22}$$

即 $P_N(x)$ 是次数 $|k|(=k_1+\cdots+k_n)$ 等于 N 的一切项 $a_k x^k$ 的和。于是级数可改写成

$$\sum_k a_k x^k = \sum_{N=0}^{\infty} P_N(x). \tag{5.23}$$

后一级数的定义是明确而令人满意的。级数的部分和是

$$S_N(x) = P_0(x) + \cdots + P_N(x) \tag{5.24}$$

$$= \sum_{|k|<N} a_k x^k.$$

如果这一幂级数绝对收敛，它就确定了求和时对项的一种排列次序。

例 9 若对每个 i，$|x_i|<1$，则幂级数

$$\sum_k x^k = \sum_{k_1,\cdots,k_n} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$$

绝对收敛。显然

$$(5.25)\qquad \sum_{|k|\leq N} |x_1|^{k_1}\cdots|x_n|^{k_n} \leqslant \prod_{j=1}^{n}(1+|x_j|+\cdots+|x_j|^N),$$

所以

$$\sum_k |x^k| \leqslant (1-|x_1|)^{-1}\cdots(1-|x_n|)^{-1}.$$

顺着(5.25)的思路略加思考就得到

$$\sum_k x^k = (1-x_1)^{-1}\cdots(1-x_n)^{-1}.$$

设级数(5.20)在点 $T=(t_1, \cdots, t_n)$绝对收敛，如果对每个坐标 i，$|x_i|\leqslant|t_i|$，则

$$\begin{aligned}\sum_k |a_k x^k| &= \sum_k |a_k|\,|x_1|^{k_1}\cdots|x_n|^{k_n}\\ &\leqslant \sum_k |a_k|\,|t_1|^{k_1}\cdots|t_n|^{k_n}\\ &<\infty.\end{aligned}$$

因此，在长方体$\{x;\ |x_i|\leqslant|t_i|,\ i=1, \cdots, n\}$上，级数一致收敛和绝对收敛。

设级数在对称的长方体$\{x;\ |x_i|<r,\ i=1, \cdots, n\}$的每一点收敛，有这样性质的实数中的最大的$r(0\leqslant r\leqslant\infty)$就是级数的**收敛半径**。在定义向量的收敛半径$r=(r_1, \cdots, r_n)$时，我们希望在每一坐标方向尽可能远，但很不幸，这样的想法行不通。例如，两个变量的幂级数$\sum a_{jk}x^j y^k$可以在长方体$|x|<1$，$|y|<\frac{1}{2}$中收敛，也在长方体 $|x|<\frac{1}{2}$，$|y|<1$中收敛，但在长方体$|x|<1$，$|y|<1$

中却不是处处收敛的。对这个级数，收敛半径是 $\frac{1}{2}$，这是我们使用对称长方体的原因。

定义 设 f 是 R^n 的子集上的复值函数，若

(i) f 的定义域是 R^n 中开集 U；

(ii) 对每个 $x_0\in U$，存在幂级数

$$\sum_k a_k(x-x_0)^k,$$

它在 x_0 的邻域中（绝对收敛并且）收敛于 f，则称 f 是实解析函数。

定理 9 每一个实解析函数 f 是 C^∞ 类函数。若

$$f(x)=\sum_k a_k(x-x_0)^k, \tag{5.26}$$

则 f 的偏导数可以从幂级数逐项微分得到，特别有

$$a_k=\frac{1}{k!}(D^k f)(x_0). \tag{5.27}$$

证明 若(5.26)在 x_0 的一个邻域中成立，则幂级数的收敛半径是某一数 $r>0$。对 $i\neq j$，若固定值 $x_i=t_i$，则 $U(t_1,\cdots,t_{j-1},x_j,t_{j+1},\cdots,t_n)$是 x_j 的实解析函数。由定理 7，f 的一切偏导数存在并且可以逐项微分得到。于是系数的公式(5.27)可直接得到。我们提醒读者注意，式中记号是：

$$k!=k_1!\cdots k_n!,$$

$$D^k f=D_1^{k_1}\cdots D_n^{k_n}f$$

$$=\frac{\partial^{|k|}f}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}$$

和一维情形一样，也可以把给定的函数展成幂级数。光滑函数用它的 Taylor 级数的 N 次部分和来逼近，我们有关于余项的一个 Taylor 公式，只限于讨论余项的积分表达式。

定理 10 设 U 是 R^n 中原点的开凸邻域，f 是 U 上的 C^{N+1} 类函数。若

$$R_N(x)=f(x)-\sum_{|k|\leqslant N}\frac{1}{k!}(D^k f)(0)x^k,$$

则

$$R_N(x)=(N+1)\sum_{|k|=N+1}\frac{x^k}{k!}\int_0^1(D^k f)(tx)(1-t)^N dt.$$

证明 在0的给定邻域中固定 x，令

$$g(t)=f(tx),\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

于是，g 是区间[0, 1]上的 C^{N+1} 类函数。我们有

$$g'(t)=\sum^n x_i(D_i f)(tx),$$

$$g''(t)=\sum_{i,j}x_i x_j(D_i D_j f)(tx),$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots$$

$$g^{(M)}(t)=\sum_{i_1,\cdots,i_M}x_{i_1}\cdots x_{i_M}(D_{i_1}\cdots D_{i_M}f)(tx).$$

这些算式对 $M=0, 1, \cdots, N+1$ 成立。每一单项式

$$x_{i_1}\cdots x_{i_M}$$

是 x^k 形式的，其中 $|k|=M$。给定 $k_1, \cdots, k_n$, $k_1+\cdots+k_n=M$，有 $M!/k!$ 个不同的 M 维向量 $(i_1, \cdots, i_M)$，其中1出现 k_1 次，2出现 k_2 次，等等。于是，

$$g^{(M)}(t)=\sum_{|k|=M}\frac{M!}{k!}x^k(D^k f)(tx),\quad 0\leqslant M\leqslant N+1.$$

把定理8用到函数 g：

$$g(1)=\sum_{M=0}^{N}\frac{1}{M!}g^{(M)}(0)+\frac{1}{N!}\int_0^1 g^{(N+1)}(t)(1-t)^N dt.$$

显然有 $g(1)=f(x)$，并且

$$\begin{aligned}f(x)-\sum_{M=0}^{N}\frac{1}{M!}g^{(M)}(0)&=R_N(x)\\&=\frac{1}{N!}\int_0^1 g^{(N+1)}(t)(1-t)^N dt\\&=(N+1)\sum_{|k|=N+1}\frac{x^k}{k!}\int_0^1(D^k f)(tx)(1-t)^N dt.\end{aligned}$$

系 若 f 是 R^n 中原点邻域内的 C^{N+1} 类函数，$f(0)=0$，则

$$f(x)=x_1 f_1(x)+\cdots+x_n f_n(x),$$

式中 $f_1, \cdots, f_n$ 是在原点(尽可能小)的邻域上的 C^N 类函数。如果 f 是 C^∞ 类函数，函数 $f_1, \cdots, f_n$ 也可以选成 C^∞ 类函数。

证明 在 $N=0$ 时应用定理，有

$$f(x)-f(0)=\sum_{j=1}^{n} x_j \int_0^1 (D_j f)(tx)\,dt.$$

因为 $D_1 f, \cdots, D_n f$ 是 C^N 类函数，每一函数

$$f_j(x)=\int_0^1 (D_j f)(tx)\,dt$$

是 C^N 类函数。若 f 是 C^∞ 类函数，则每一 $D_j f$(因此，每一 f_j)也是 C^∞ 类函数。

习 题

1. 设 f 是 U 上的实解析函数，g 是 V 上的实解析函数，则

$$h(x;y)=f(x)g(y)$$

是 $U\times V$ 上的实解析函数。

2. 设 f 是原点邻域上的 C^{N+1} 类函数，证明存在唯一的一个次数不超过 N 的多项式 P，使得

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-P(x)}{|x|^N}=0.$$

3. 若

$$h(x)=\sum_{i_1,\cdots,i_M} x_{i_1}\cdots x_{i_M}, \quad x\in R^n, \quad |x|<1,$$

证明(如果 $|k|=M$)

$$(D^k h)(0)=M!.$$

4. 设 f 是原点邻域上的实解析函数，若 $f(0,\cdots,0)=0$，则

$$f(x)=x_1 f_1(x)+\cdots+x_n f_n(x),$$

式中 $f_1, \cdots, f_n$ 是原点邻域上的实解析函数。

5.5 复 幂 级 数

幂级数

[illegible] $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ [illegible]

只是一种形式的记号，它无非是说有一个系数序列 a_n，以及可以把种种不同的对象作为 x，然后问由它们组成的幂级数是否收敛。在本书中，为了讨论 e^A，$(I+A)^{-1}$ 等等，我们曾用复矩阵代入幂级数。也可以用级数定义 $\sin A$，$\cos A$，对 $|A|<1$ 时 $\ln(I+A)$，等等。在有趣而重要的替代物中，矩阵还不是最一般的。系数本身也允许是矩阵或其它各种数学对象。显然，我们不可能去讨论一切可能的情况。但是我们有责任讨论一些(无可争辩的)最重要的情况。

我们考虑幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{5.28}$$

式中 a_n 是复数，z 是复变量，我们要讨论级数的和函数的性质。若幂级数(5.28)对特殊值 $z=w$ 收敛，则在开圆 $|z|<|w|$ 的紧子集上级数一致收敛并绝对收敛。它的证明和证明(5.11)一样。于是，级数有收敛半径 r，它由下式给出：

$$\frac{1}{r}=\lim\sup|a_n|^{1/n}.$$

在圆 $D_r=\{z:\ |z|<r\}$ 的紧子集上级数一致并绝对收敛，对 $|z|>r$ 的点 z，级数不收敛。

让我们考虑有正收敛半径的幂级数，研究级数的和函数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\quad z\in D_r. \tag{5.29}$$

我们希望 f 是有良好性质的函数。在什么意义下 f 有导数?显然，f 有各阶偏导数；但是，让我们像早先对实幂级数所做的那样，先作一些形式上的讨论。设 $z_0\in D_r$，则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n z_0^{n-1}. \tag{5.30}$$

这可以用我们在实幂级数情形时做过的同样方法得出。也可以像下面那样直接证明。设

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

显然，

$$\lim_{z\to z_0} \frac{p_n(z) - p_n(z_0)}{z - z_0} = \sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, z_0^{k-1}.$$

同时

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{p_n(z) - p_n(z_0)}{z - z_0} = (z - z_0)^{-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z^k - z_0^k)$$

(5.31) $$= \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\, \frac{z^k - z_0^k}{z - z_0}.$$

现在

$$\left|\frac{z^k - z_0^k}{z - z_0}\right| = |z^{k-1} + z^{k-2} z_0 + \cdots + z_0^{k-1}| \leqslant k\, c^{k-1},$$

式中 $c = \max[|z|, |z_0|]$，于是，从(5.31)得到

$$\lim_{n} \frac{p_n(z) - p_n(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

并且收敛性在 z_0 的邻域上是一致的。因为可以交换两个极限的次序，从而得到(5.30)。现在，我们可以介绍两个定义和一个定理了。

定义 设 f 是 C 的子集上的复值函数。若

(i) f 的定义域是 C 中的开集；

(ii) 对任一点 $z_0 \in D$，存在关于 z_0 的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

它在 z_0 的一个邻域中收敛于 $f(z)$，我们称 f 是复解析(或全纯)函数。

定义 设 f 是 C 中开集 D 上的复值函数，$z_0 \in D$，如果极限

(5.32)
$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

存在，我们称 f 在 z_0 是复可微的（或在 z_0 有复导数）。

定理 11 一个复解析函数具有各阶复导数。如果在 z_0 的邻域中，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

则（在同一邻域中）f 的第 n 阶复导数 $f^{(n)}$ 是把 f 的幂级数 n 次形式微分后所得幂级数的和；特别有

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)。$$

利用在实解析函数时所使用的同样的论证方法可以证明函数 f 为复解析的当且仅当它的（开）定义域可被开集族所覆盖，在每一个开集上，f 是收敛幂级数的和。换言之，若

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad |z|<r,$$

并且若 $|z_0|<r$ 则

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n,\quad |z-z_0|<r-|z_0|.$$

由此，我们可以知道一些复解析函数：

(i) 多项式：

$$p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n;$$

(ii) 指数函数：

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n;$$

(iii) 正弦函数：

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1};$$

(iV) 余弦函数：

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}.$$

它们的复导数可以通过把幂级数逐项微分得到。因此若

$$f(z)=e^z,$$
$$g(z)=\sin z,$$
$$h(z)=\cos z,$$

则 $f'=f,\ g'=h,\ h'=-g$.

不久，我们要列举由已知解析函数产生新解析函数的方法。

定理 12（恒等定理） 设 f 是平面中连通开集 D 上的复解析函数。假定存在由不同点 $z_n\in D$ 组成的序列，使得

(i) $f(z_n)=0$;

(ii) $\{z_n\}$ 收敛于 D 中点 z_0,

则 $f=0$。

证明 为方便起见，设 $z_0=0$。我们有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\qquad |z|<r.$$

由于 $f(z_n)=0$, $\lim\limits_n z_n=0$, 故常数 $a_0=f(0)=0$。令

$$g(z)=\sum a_n z^{n-1},\qquad |z|<r.$$

于是 $f(z)=z\,g(z)$。现在 $0=z_n g(z_n)$，并且由于 $z_1, z_2, z_3, \cdots$ 各不相同，可以认为它们都不是 0。于是 $g(z_n)=0$, 结论是 $g(0)=0$, 即 $a_1=0$。现在再对 $g(z)/z$ 重复上述的论证，由归纳法就得到对一切 n, 有 $a_n=0$。

我们刚才证明了：若 $z_0\in D$，并且如果存在各不相同的 z_n 所成的点列，使得 $f(z_n)=0$，并且 $z_0=\lim\limits_n z_n$，则在 z_0 的一个邻域内，$f(z)=0$。设 N 是由这种点 z_0 组成的集，而点 z_0 存在上述性质的序列 $\{z_n\}$。我们已证明了 N 是相对于 D 的开集。显然，N 是相对于

D的闭集。根据假设，N 非空。由于D是连通的，所以，$N=D$（它告诉我们 $f=0$）。

读者在读了实幂级数以后再来学习关于复幂级数的内容可能会觉得乏味。虽然，我们早先没有叙述；但显然，恒等定理对区间上的实解析函数是有效的。应该指出，研究复解析函数是重要的，它和我们曾经讨论过的那种分析具有十分不同的品质，它同样是一种引人入迷的对象。从这一点来说，让我们来看看原由。

如果我们象 5.3 节那样进行讨论，看来很自然地，我们应该证明 Taylor 定理的复数形式，其实不需要这样一个定理。在数学中值得注意的一个事实是：若 f 是复可微函数则 f 是复解析的。也就是，由一阶复导数的存在性可推出（f 存在各阶导数且）f 是局部收敛的幂级数的和。在导数是连续的情况下，我们以后要证明这一结果。这一结论和实直线的情况形成鲜明的对比，这就提醒我们要仔细地研究实和复导数之间的联系。

设 f 是平面上原点附近的复解析函数：

$$f(z)=\sum_n a_n z^n, \quad z\in D_r.$$

通常把 C 和 R^2 等同起来，把 f 看作 R^2 上的复值函数。也就是把 $f(x+iy)$ 看作两个实变数 x，y 的函数。f 必是 R^2 上的光滑函数。因为可把 $f(x+iy)$ 展开成 x 和 y 的二重幂级数。对每一项 z^n 用二项式定理：

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= \sum_n a_n(x+iy)^n \\ &= \sum_n a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (iy)^{n-k} \\ &= \sum_{k,p} c_{kp} x^k y^p, \end{aligned} \tag{5.33}$$

式中

$$c_{kp}=a_{k+p}\binom{k+p}{k} i^p.$$

若级数

$$\sum_{k,p} c_{kp} x^k y^p$$

是绝对收敛的，那末(5.33)最后一个等式是合法的。因此，可以把 $\Sigma a_n(x+iy)^n$ 的项重新组合。现在有

$$\sum_{k,p} |c_{kp}||x|^k|y|^p = \sum_n |a_n|(|x|+|y|)^n.$$

(对一个级数，若它的项是非负的，那么重新组合是合理的。若 $|x|+|y|<r$，则二重级数绝对收敛，并且 f 是原点邻域内 x，y 的实解析函数。

例 10 不是每一个 x，y 的实解析函数是复解析的。有很多方法来了解这一事实，要从中选哪一个才好呢？这倒是困难的。或许最明显的一个方法是：令

$$g(x+iy)=x.$$

显然，对 $x=\Sigma a_n(x+iy)^n$ 如何整理 a_n 略微有点困难。我们也可证明 g 不存在复导数：

$$\lim_{z\to 0} \frac{g(z)-g(0)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{x}{z}.$$

这是因为若沿虚轴趋向于原点，xz^{-1} 趋向于0，但是如沿实轴趋于原点，xz^{-1} 趋于1.

若 f 是复解析的，$f(x+iy)$（局部地)是 x，y 的幂级数的和就意味着

$$R^2 \xrightarrow{f} C$$

是 C^∞ 类函数。有另一种方法证明 f 有各阶偏导数，并且要使 R^2 上光滑函数是复解析的，有各阶导数是它应满足的必要条件。在介绍这件事时，我们提醒读者，不要把复导数和 f 的梯度相混淆。

若复导数

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

存在，则当 z 沿任意通过 z_0 的直线趋于 z_0 时极限都存在。f 在 z_0 点沿(复数)向量 w 方向的导数是

$$
\begin{aligned}
(D_w f)(z_0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(z_0+tw)-f(z_0)}{t} \\
&= w\lim_{t\to 0}\frac{f(z_0+tw)-f(z_0)}{tw} \\
&= wf'(z_0).
\end{aligned}
$$

特别

$$
\frac{\partial f}{\partial x}=f' \tag{5.34}
$$

$$
\frac{\partial f}{\partial y}=i f'.
$$

若 f 是复解析的，则 f' 存在并且是复解析的。重复应用 (5.34) 就可证明 f 是 C^∞ 类函数。我们也得到了复可微性的一个重要知识。

定理 13 设 f 是平面中开集 U 上的 C^1 类复值函数，则下列条件是等价的。

(i) f 在 U 上是复可微的。

(ii) $\dfrac{\partial f}{\partial x}+i\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ (在整个 U 上)。

(iii) 若 $u=\operatorname{Re} f$，$v=\operatorname{Im} f$，则(在整个 U)

$$
\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad 和 \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.
$$

证明 在(5.34)中，已证明了由(i)可推出(ii)。用 $u+iv$ 代替 f，记住复数是 0 当且仅当它的实部和虚部是 0，可直接看出(ii)和(iii)是等价的。若(ii)成立，我们需要证明 f 在 $z_0\in U$ 是复可微的。不妨设 $z_0=0$。由于 f 是 C^1 类函数，对一切靠近原点的 $z=x+iy$ 就有

$$
f(x+iy)-f(0)=x\int_0^1(D_1f)(tz)dt+y\int_0^1(D_2f)(tz)dt.
$$

这是定理 5.9 的特殊情形，读者也可以看作定理 5.7 的一个应用。但说穿了是微积分基本定理应用于区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上的函数 $g(t)=f(tz)$。从和 D_1f, D_2f 有关的微分方程(ii)中，我们有

$$f(z)-f(0)=z\int_0^1 (D_2f)(tz)dt.$$

于是

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim_{z\to 0}\int_0^1 (D_1f)(tz)dt.$$

由于 D_1f 是连续的，后一极限是 $(D_1f)(0)$。这说明 f 是复可微的，并且(5.34)成立。

定理条件 (iii) 中的方程是 **Cauchy-Riemann 方程**，而(ii)是 **Cauchy-Riemann 条件**。条件

$$\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

是对 C^1 类函数表达复可微性的一个简便方法。若 f 是 C^2 类函数(它是自动成立的，不过我们现在还不知道)，我们可以微分 Cauchy-Riemann 方程，得到

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+i\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,$$

并且，因为混合偏导数是相等的，我们得到

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0. \tag{5.35}$$

微分方程(5.35)叫做 **Laplace 方程**，它的解叫做**调和函数**。若 f 是复可微的，并且是 C^2 类函数，则 f 的实部和虚部(以及 f)是调和函数。

习　题

1. 若 f 是 w 的邻域内的复解析函数，则

$$g(z)=\frac{f(z)-f(w)}{z-w}$$

是同一邻域内的复解析函数。

2. 若 f 在连通开集 D 上为复解析函数并且不是常数，又设 $w\in D$，则对某一 n

$$f(z)-f(w)=(z-w)^n g(z),$$

式中 g 是 D 上复解析函数，并且 $g(w)\neq 0$。

3. 若 g 是 $[0,1]$ 上的点态连续(或可积)函数，则

$$f(z)=\int_0^1 \frac{g(x)}{x-z}\,dx$$

是区间 $[0,1]$ 外的复解析函数。

4. 设 f 是域 D 上的复解析函数，若 f 是实值的，则 f 是常数。

5. 设 f 是连通开集 D 上的复解析函数，$f'=0$，则 f 是常数。

6. 函数 $f(z)=e^z$ (当然)是全平面上的复解析函数。通过计算直接验证 f 的实部是调和的。

7. 在平面上用 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 引进极坐标。证明 Cauchy-Riemann 条件可表达成

$$r\frac{\partial f}{\partial r}+i\frac{\partial f}{\partial\theta}=0.$$

8. 设 f 是平面中开集上的 C^2 类复值函数。证明 f 是复可微的当且仅当 $f(z)$ 和 $zf(z)$ 是调和的。

9. 设 u 是实值调和函数。证明：若 u^2 也是调和的，则 u 是常数。

10. 用幂级数定义

$$\ln(1+z),\qquad |z|<1.$$

当然，你需要 $\exp(\ln(1+z))=1+z$。参照例 7 验证 $\exp(\ln(1+z))=1+z$。

11. 证明，在原点的邻域内，不可能推出 z 的平方根是解析的。换言之，证明在原点的邻域内不存在复解析函数 f，使 $f(z)^2=z$。

*12. 证明在原点的邻域内不可能推出 z 的平方根是连续的。

13. 证明在 $z=1$ 的邻域中，z 的平方根是解析的(提示：参见习题10.)。

14. 用幂级数定义(对复矩阵 A)

$$\ln(I+A),\qquad |A|<1,$$

证明 $\exp(\ln(I+A))=I+A$。

15. 若 N 是 $k\times k$ 矩阵，它是幂零的($N^k=0$)，则对某一复矩阵 B，有

$I+N=e^{B}$。

16. 利用复矩阵的 Jordan 标准形，证明指数映射

$$A\longrightarrow e^{A},$$

把 $k\times k$ 复矩阵映射到 $k\times k$ 可逆矩阵上。

5.6 复解析函数的主要结论

现在我们对复可微性是有点了解了。我们将要介绍在复解析函数研究中的一些精细方法和结果。复解析函数的一部分特殊性质可以从很基本的平均值性质得到。

引理 设$\{z;\ |z-z_0|\leqslant\rho\}$是复解析函数$f$定义域中的一个闭圆，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(z_0+\rho e^{i\theta})\,d\theta. \tag{5.36}$$

证明 设f是在以z_0为中心，ρ为半径的圆内部和圆周C_ρ上的复解析函数。我们要求证明f在C_ρ上的平均值等于f在C_ρ中心的值。要了解为什么会有这一情况并不困难。为简单起见，令$z_0=0$。于是

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\qquad |z|<\varepsilon,$$

或

$$f(re^{i\theta})=\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n e^{in\theta},\qquad 0\leqslant r<\varepsilon.$$

现在

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\theta}\,d\theta=\begin{cases}0, & n\neq 0,\\ 1, & n=0.\end{cases}$$

如果$r<\varepsilon$，则(根据级数的一致收敛性)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(re^{i\theta})\,d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\theta}\,d\theta$$
$$=a_0=f(0).$$

看来似乎已证明好了，其实还不完全。假设是说 f 在 $|z|\leqslant\rho$ 解析，我们证明了

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(re^{i\theta})d\theta,\quad r<\varepsilon,$$

式中 ε 是 f 关于原点展开级数的收敛半径。当 f 是 $|z|\leqslant\rho$ 上的解析函数时，f 关于 0 的级数展开必定在 $|z|\leqslant\rho$ 上收敛，这是一个定理，但我们并不知道它。我们面对 $\varepsilon<\rho$ 的可能性。

定义

$$I(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(re^{i\theta})d\theta,\quad 0<r\leqslant\rho. \tag{5.37}$$

如果能指出

$$\frac{\partial I}{\partial r}=0,$$

我们要验证 $I(r)$ 是常数。现在 f 是复可微的，因此有关于径向和角的偏导数：

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r}(z_0)&=\lim_{t\to r_0}\frac{f(te^{i\theta_0})-f(r_0e^{i\theta_0})}{t-r_0}\\&=e^{i\theta_0}f'(z_0),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}(z_0)=iz_0f'(z_0).$$

由复可微性推出

$$r\frac{\partial f}{\partial r}+i\frac{\partial f}{\partial\theta}=0.$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial r}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial f}{\partial r}(re^{i\theta})d\theta\\&=-\frac{i}{r}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial f}{\partial\theta}(re^{i\theta})d\theta\\&=\frac{-i}{2\pi r}[f(re^{i\pi})-f(re^{-i\pi})]\\&=0.\end{aligned}$$

现在我们知道 $I(r)$ 确是常数了。进而，对充分小的 r，$I(r)=f(0)$。这样就证完了平均值性质。

许多人更喜欢把平均值定理中的积分写成区间 $[-\pi,\pi]$ 上函数 $z(\theta)=\rho e^{i\theta}$ 的 Riemann-Stieltjes 积分。由于

$$dz(\theta)=\frac{dz}{d\theta}d\theta$$

$$=i\rho e^{i\theta}d\theta=$$

$$iz\,d\theta,$$

所以(像例 9 中那样)，我们也可把平均值性质写成：

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(z)}{z}dz(\theta).$$

在处理解析函数时，这是表示平均值性质的十分有用的方法，并且是在许多方面更"自然"的方法。按实际情况，这一记号的缺点是没有指明和 $|z|=\rho$ 有关。换言之，为了把 z 看作 θ 的函数，需选择某一个 ρ 并且固定 $|z|=\rho$，对积分的记号理应反映这一选择。相应地，若 g 是在圆 $|z|=\rho$ 上的任一连续复值函数，我们定义

$$\int_{|z|=\rho}g(z)dz$$

就是积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}g(z)dz(\theta),\quad z=\rho e^{i\theta}.$$

读者或许可把积分

$$\int_{|z|=\rho}g(z)dz$$

看作一阶微分形式

$$g(z)dz=g(x,y)(dx+i\,dy)$$

在圆周 $|z|=\rho$ 上(沿反时针方向)的线积分。这里它只是一种简写。

定理 14(Cauchy) 若 f 是以原点为中心，半径为 ρ 的闭圆盘(它包含一个开集)上的复解析函数，则

(5.38) $$f(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f(z)}{z-w}dz,\qquad |w|<\rho.$$

证明 固定 w。令

$$g(z)=z\cdot\frac{f(z)-f(w)}{z-w}.$$

当然，我们定义 $g(w)=wf'(w)$。由于 f 是复解析的，则 g 也是复解析的(上节习题1)。对 g 使用平均值定理：

$$\begin{aligned}0&=g(0)\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{g(z)}{z}dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f(z)}{z-w}dz-f(w)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{dz}{z-w}.\end{aligned}$$

通过简单计算可得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{1}{z-w}dz=1,\qquad |w|<\rho,$$

从而就得到 Cauchy 公式。在下面的系的证明中，由 $\frac{1}{z-w}$ 的幂级数展开，就可以清楚的看到上述计算是正确的。

系 设 f 是开集 D 上的复解析函数，z_0 是 D 中一点。在以 z_0 为中心的含在 D 中的最大圆盘中，对 f 展开的幂级数收敛于 f。

证明 不妨设 $z_0=0$。设闭圆盘 $|z|\leqslant\rho$ 包含在 D 中。要证明在圆盘 $|z|\leqslant\rho$ 上，f 关于原点的幂级数收敛于 f。对 $f(w)$ 考察由(5.38)给定的 Cauchy 公式。设 $|z|\leqslant\rho$ 和 $|w|<\rho$，则

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-w}&=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}w}\\&=\frac{1}{z}\left(1+\frac{w}{z}+\left(\frac{w}{z}\right)^2+\cdots\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{z^{n+1}},\end{aligned}$$

所以

$$f(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f(z)}{z-w}\,dz$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n w^n,$$

式中

(5.39)
$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz.$$

这一引理去掉了以前曾经使我们感到不方便的一个细节。要理解这一点，读者可以从复解析函数的定义出发，再仔细想一想这个系说的内容。

定理 15 任一(连续地)复可微函数是复解析的。

证明 复可微函数的和、积、商是复可微的(在有定义的地方)。这可以像在实直线上那样，从复可微的定义立即可得这一结论。

在本定理中，我们给定 f，它是平面中一个开集上的复可微的 C^1 类函数，即它满足 Cauchy-Riemann 条件。要证明 f 是(局部地)收敛幂级数的和。不妨假定 f 的定义域包含以原点为中心，ρ 为半径的闭圆盘，证明 f 在此圆盘上是解析的。设 w 是一点，$|w|<\rho$。定义

$$g(z)=z\cdot\frac{f(z)-f(w)}{z-w},\quad z\neq w,$$
$$g(w)=wf'(w).$$

显然，除了在 w 处，g 是连续复可微的；而 g 在 w 是连续的。我们要求

$$g(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(re^{i\theta})d\theta,\quad r\leqslant\rho.$$

为了证明这个式子，令 $I(r)$ 是右边的积分，则在 $0\leqslant r\leqslant\rho$ 上 $I(r)$ 是连续的，可能除了在 $r=|w|$ 处，$I(r)$ 是可微的。由于除了在 w 处，g 是复可微的，因而

$$r\frac{\partial g}{\partial r}+i\frac{\partial g}{\partial \theta}=0,\quad r\neq|w|.$$

如同关于解析函数平均值性质的证明一样，有

$$\frac{dI}{dr}=0\quad(r\neq|w|).$$

所以 $I(r)$ 是常数。显然，

$$\lim_{r\to 0}I(r)=g(0).$$

结果，我们证明了对 g 的平均值性质：

$$g(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\rho e^{i\theta})d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{g(z)}{z}dz.$$

这就是说

$$0=g(0)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f(z)}{z-w}dz-f(w)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{dz}{z-w}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f(z)}{z-w}dz-f(w).$$

所以 Cauchy 公式对 f 有效。积分公式使我们可以把 f 直接展开成关于原点的幂级数。

早些时候我们曾说在没有假定 f' 是连续的情形下定理 15 是有效的。也就是(在开集上)复导数的存在性可以推出解析性。我们已给出的证明也适用于那种情况，然而论证并不简单，所以我们把它省略了。

下面是平均值性质(或 Cauchy 公式)另一个基本的系。

定理 16 设 D 是平面中的一个开集，$\{f_n\}$ 是 D 上的复解析函数序列。若 f_n 一致收敛于 f，则 f 是复解析的。

证明 解析性是局部性质，因此只需要对以原点为中心的圆

盘 D 证明定理就可以了。当 $|w|<r$ 和 r 小于 D 的半径时，由 Cauchy 公式得到

$$f_n(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f_n(z)}{z-w}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_n(re^{i\theta})\frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta}-w}d\theta.$$

固定 r 和 w，由于 $f_n(re^{i\theta})$ 关于 θ 一致收敛于 $f(re^{i\theta})$，且 $f_n(w)$ 收敛于 $f(w)$，我们有

$$f(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z-w}dz.$$

因此，在圆盘 $|z|<r$ 上 f 是复解析的，

$$f(w)=\sum_n a_n w^n,$$

式中

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz.$$

(见先前的系的证明。)

系 设 f, g 是复解析函数，则(在有定义的地方)和 $f+g$，积 fg，商 f/g 以及复合 $f\circ g$ 是复解析函数。

证明 这一结果从定理15和复可微函数关于和、积等的相应结果来推导更容易。这种方法对我们的思考是有益的。定理16告诉我们，一个函数是复解析的当且仅当它局部地是多项式序列 $p_n(z)$ 的一致极限。由于多项式的和、积、复合是多项式，因此，若 f, g 是解析的，则 $f+g$，fg 和 $f\circ g$ 也是解析的。对 $z\neq 0$，函数 $1/z$ 也解析：

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z_0+(z-z_0)}$$

$$=\frac{z_0^{-1}}{1+z_0^{-1}(z-z_0)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z_0^{-(n+1)}(z-z_0)^n, \quad |z-z_0|<|z_0|.$$

于是(与 $1/z$ 联系来看) f/g 在 g 为 0 的集外是解析的。

由此可知，实解析函数类在和、积、商、复合运算下(在有定义的地方)是封闭的。这是由于这种函数关于 x_0 的幂级数可以扩张成复平面内 x_0 邻域中的复解析函数。但是注意定理在一致收敛性上完全破坏了。任何一个在闭区间上的连续函数能够用实解析函数一致逼近，这是一个著名的定理(我们将立刻证明它)。对于幂级数，在区间上的一致收敛性和在圆盘上的一致收敛性之间有很大的不同。

我们把复解析函数的知识作一简短的总结。我们已证明，对平面中开集 D 内的复值函数 f，下列条件是等价的：

1. f 是复解析的，即在每一点 $z_0\in D$，存在 $(z-z_0)$ 的幂级数，它在 z_0 的邻域中收敛于 $f(z)$。

2. f 是复可微的。

3. 若 $f=u+iv$，其中 u，v 是从 D 到 R^2 的 C^1 类实值映射 $(x, y)\to(u, v)$，并满足 Cauchy-Riemann 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

4. 若闭圆盘 $|z-z_0|\leqslant\rho$ 包含在 D 内，则

$$f(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(z)}{z-w}dz, \quad |w-z_0|<\rho,$$

或

$$f(w)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(w-z_0)^n, \quad |w-z_0|<\rho,$$

式中

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

5. 设 z_0 是 D 中任一点，存在多项式序列 $p_n(z)$，在 z_0 的某

一邻域上 $p_n(z)$ 一致收敛于 $f(z)$。

我们只验证了条件 2 推出在 f' 是连续的假设下的解析性。我们也证明了每一个复解析函数在圆周上有平均值性质。因为这一性质不是刻划复解析函数的(事实上是调和函数的特征)，因此上面条款中没有这一条。然而，有平均值性质的更强的形式是刻划解析函数的。若圆盘 $|z-z_0|\leqslant\rho$ 包含在解析函数 f 的定义域中，则 $g(z)=(z-z_0)f(z)$ 在 $|z-z_0|\leqslant\rho$ 上是复解析的；并满足 $g(z_0)=0$。根据 Cauchy 公式

$$
\begin{aligned}
0&=g(z_0)\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{g(z)}{z-z_0}dz\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho}f(z)dz.
\end{aligned}
$$

换句话说，若圆 $\gamma=\{z;|z-z_0|=\rho\}$ 包含在 D 中，一阶微分形式 $f(z)dz$ 在圆 γ 上的线积分是 0：

$$\int_\gamma f(z)dz=0.$$

我们可以在特征 1—5 之外再加一条：

6. 设 γ 是定义域 D 中任一闭圆盘的圆周。则

$$\int_\gamma f(z)dz=0.$$

为什么条件 6 可以推出解析性呢？我们只就 f 是 C^1 类函数时证明它。借用两个变量函数的微积分中的 Green 定理：设 P 和 Q 是闭圆盘 Δ (的一个邻域) 上的实值或复值 C^1 类函数，若 γ 是 Δ 的(圆形)边界，沿反时针方向，则

$$\int_\gamma (Pdx+Qdy)=\int_\Delta\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

由于 $Pdx+Qdy=fdz=fdx+ifdy$，并且

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\Delta \left(i\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

由条件 6 得到连续函数 $i(\partial f/\partial x) - (\partial f/\partial y)$ 具有这样的性质：对定义域 D 中的每一个闭圆盘 Δ，有

$$\int_\Delta \left(i\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy = 0,$$

从而就推出复可微性的 Cauchy-Riemann 条件

$$i\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

条件 4 和 6 放宽些仍然有效。设 f 是解析的，γ 是 D 中任一简单的、闭的可求长路径，则

(Cauchy 公式) $\qquad f(w) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz,\qquad$ (w 在 γ 内)

(Cauchy 积分定理) $\qquad \displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$

不严格地说，一条简单的闭可求长路径，就是它内部的每一点只能被它围绕一次，讨论这些事情实在是离题太远了。

习　题

1. 设 f 是圆盘 D 上的复解析函数，则 $f = g'$，式中 g 在 D 上是复解析的。

2. 设 f 是圆盘 D 上的复解析函数，在 D 上没有零点。证明 $f = e^g$，式中 g 在 D 上是复解析的。提示：g 必须满足什么微分方程？

3. 设 f 在单位圆盘 $|z| < 1$ 中是复解析和有界的，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\right|^2 < \infty.$$

提示：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

是什么？

4. 设 f 在 $|z| \leqslant \rho$ 上是复解析的，则 f 的复导数由下式给出：

$$f^{(n)}(w)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}dz,\quad |w|<\rho.$$

5. (Liouville 定理)设 f 是全平面上有界且复解析的函数，则 f 是常数。提示：利用习题 4 考察 $f'(w)$。并考虑相当大的圆周。

6. 设 f 是挖去一点的圆盘 $0<|z|<r$ 上的解析函数。若 f 是有界的，证明 f 可扩张为圆盘 $|z|<r$ 上的复解析函数。提示：先证明 $z^2f(z)$ 在 $|z|<r$ 解析。

7. 用习题 5 和 6 证明：若 f 是全平面上的复解析函数，如果存在常数 K，使得对充分大的 $|z|$ 有

$$|f(z)|\leqslant K|z|^n,$$

则 f 是次数不超过 n 的多项式。

8. 设 $\{f_n\}$ 是 D 上复解析函数序列。若 f_n 一致收敛于 f，则 f_n' 收敛于 f'。

9. 设 f 是圆环 $r_1<|z|<r_2$ 上的复解析函数。证明 $f=g+h$，式中 g 是圆盘 $|z|<r_2$ 上的复解析函数，而 h 是圆盘 $|z|\leqslant r_1$ 外的复解析函数。提示：可考虑一下能把 g 定义为什么积分？

*10. 令

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n!},\quad |z|<1,$$

若 $|z|=1$，证明在 z 的邻域中，f 不能扩张为解析函数。

*11. 设

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2^n}}{n^2},\quad |z|\leqslant 1,$$

证明 f 在 $|z|\leqslant 1$ 上连续，在 $|z|<1$ 上解析，但在单位圆 $|z|=1$ 上的任一点，f 都不能扩张为解析的。

5.7 复解析映射

解析函数理论的一个重要方面是解析映射

$$D\xrightarrow{f}C$$

的几何性质。我们没有时间，也没有工具去深入讨论这个问题。但是，几个基本而容易的事实还是要介绍的。

定理 17（弱最大原理） 设 f 是开集 D 上的复解析函数，V 是

D 的开子集，且 $\overline{V}$ 是紧集。则在 V 的边界上存在一点 w，使得

$$|f(w)| = \sup_V |f(z)|.$$

证明 由于 f 是连续的，存在一点 $w \in \overline{V}$，使得

$$|f(w)| = \max_{\overline{V}} |f(z)|$$

$$= \sup_V |f(z)|.$$

在这样的点 w 中，选择最靠近 V 边界的一点（因为 V 的边界是闭的，这种点是有的。），且由以下理由可知，w 不可能在 V 中。

若 $w \in V$，选择 $r>0$，使以 w 为中心，r 为半径的闭圆盘包含在 V 中。设 C_r 是以 w 为中心，r 为半径的闭圆周，则 $f(w)$ 等于 f 在 C_r 上的平均值：

$$f(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(w+re^{i\theta})d\theta.$$

因此，

$$|f(w)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(w+re^{i\theta})|d\theta$$

$$\leqslant \sup_{C_r} |f| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta$$

$$= \sup_{C_r} |f| \leqslant \sup_V |f|.$$

若 $|f(w)| = \sup_V |f|$，则上面这一串不等式的每一步，等号必须成立。这只能是在圆 C_r 上，$f(z)$ 等于常数 $f(w)$，因为 $|f(w)| - |f(z)|$ 是非负连续函数，其积分为 0。C_r 的某一点比 w 更靠近 V 的边界，因此达到 $\sup_V |f|$ 的点可以比 w 更靠近 V 的边界，这与 w 的选择相矛盾。

系（强最大原理） 设 f 是连通开集 V 上的非常数复解析函数，则

$$|f(w)| < \sup_V |f(z)|, \quad w \in V;$$

换句话说，$|f|$不能在V中任一点达到最大值。

证明 只要就$\overline{V}$是紧集的情形给出证明就够了（为什么？）。从定理17证明中看到，若$w\in V$，并且

$$|f(w)|=\sup_{V}|f(z)|,$$

则f在w的邻域上是常数。由于V是连通的，除了f是常数外，就不能成立上面的等式。

只要利用一点点解析函数模的性质，我们就能证明数学中的一个最基本的定理。

定理18（代数基本定理） 设

$$p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n,$$

是复系数的非常数多项式，则存在复数z，使$p(z)=0$。

证明 不妨设$n>1$，因为$n=1$时是平凡的。也可以假定$a_n=1$：

$$p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}+z^n.$$

我们要求$|p(z)|$在一个相当大的集之外是相当大的，即

$$\lim_{|z|\to\infty}|p(z)|=\infty.$$

这是因为我们有

$$|p(z)|\geqslant|z|^n-\left|\sum_0^{n-1}a_kz^k\right|$$

$$\geqslant|z|^n-\sum_0^{n-1}|a_k||z|^k.$$

若$|z|>1$，则$|z|^k\leqslant|z|^{n-1}$，$k=1, 2, \cdots, n-1$；因此

$$|p(z)|\geqslant|z|^n-c|z|^{n-1},\quad |z|>1.$$

式中$c=|a_0|+\cdots+|a_{n-1}|$。于是

$$|p(z)|\geqslant|z|^{n-1},\quad |z|\geqslant1+c.$$

这一不等式说明$|p(z)|\to\infty$。特别，可以选择$r>0$，使得

$$|p(z)|>1+|a_0|,\quad |z|\geqslant r. \tag{5.40}$$

p 的任一零点必定在圆盘 $\bar{D}_r=\{|z|\leqslant r\}$ 中。那么，p 是否有一个零点在 $\bar{D}_r$ 中呢？若存在点 $w\in\bar{D}_r$，满足

(5.41) $$|p(w)|=\inf\{|p(z)|;z\in\bar{D}_r\}\leqslant|a_0|,$$

因为 p 是连续的，而 $\bar{D}_r$ 是紧集。根据(5.40)和(5.41)，点 w 是在开圆盘 D_r 中。若 $p(w)\neq 0$，则 $1/p$ 是 D_r 上解析函数，且 $\left|\frac{1}{p}\right|$ 在 w 有局部极大值。根据最大原理，$1/p$（因而 p）是常数，这不可能，所以 $p(w)=0$。

系 若 p 是带有复系数的多项式

$$p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n,\quad a_n\neq 0,$$

则存在复数 $z_1,\cdots,z_n$ 使得

$$p(z)=a_n(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n).$$

证明 若 $p(w)=0$，令 $p(z)=(z-w)q(z)$，则 q 是多项式。反复应用定理即得。

现在我们给出一般的解析函数零点的有关结果。它是一个计算零点的积分公式。当我们计算零点时，常常谈到零点的阶，它的含义如下。若 f 在 z_0 附近解析，$f\neq 0$，可以把 $f(z)$ 写成

$$f(z)=(z-z_0)^n g(z).$$

式中 g 在 z_0 附近解析，并且 $g(z_0)\neq 0$。我们称 n 是 f 的零点 z_0 的**阶数**或零点的**重数**。

定理 19 设 f 是闭圆盘 $|z-z_0|\leqslant\rho$ 上的复解析函数，它在 $|z-z_0|=\rho$ 上无零点，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

等于 f 在圆盘 $|z-z_0|<\rho$ 中的零点数。

证明 不妨设 $z_0=0$。若 f 在 $|z|\leqslant\rho$ 没有零点，则 f'/f 在圆上解析。根据平均值性质，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{zf'(z)}{f(z)}\bigg|_{z=0}=0.$$

因此，当 f 没有零点时，公式是正确的。

现在，讨论一般的 f。恒等定理(定理 12) 告诉我们，f 在包含 $|z|\leqslant\rho$ 的一个开集上解析，f 不恒等于 0，它只能在圆盘中的有限个点上为 0。设 $z_1, \cdots, z_n$ 是 $|z|<\rho$ 中的不同点，并对每个 z_i，$f(z_i)=0$。而 k_j 是零点 z_j 的阶数，则

$$f(z)=(z-z_1)^{k_1}\cdots(z-z_n)^{k_n}g(z),$$

式中 g 是 $|z|\leqslant\rho$ 上的解析函数，且无零点。计算

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{g'(z)}{g(z)}+\sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{z-z_j}.$$

根据没有零点时的结果

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{j=1}^{n}k_j\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{dz}{z-z_j}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}k_j.$$

引理 设 f 在点 z_0 的邻域上是复解析和非常数的函数。设 n 是 $f-f(z_0)$ 在 z_0 的零点的阶，则对任一充分小的数 $\rho>0$，存在 $\varepsilon>0$，使当 $0<|\alpha-f(z_0)|<\varepsilon$ 时，正好存在 n 个点 z，$|z-z_0|<\rho$，且 $f(z)=\alpha$。

证明 设

$$D_\rho=\{z;\ |z-z_0|<\rho\}$$

$$C_\rho=\{z;\ |z-z_0|=\rho\},\quad \rho>0.$$

选择 ρ 充分小，使得

(i) f 在 $\overline{D}_\rho$ 上复解析；

(ii) 若 $z\in\overline{D}_\rho$，$z\neq z_0$ 则 $f(z)\neq f(z_0)$；

(iii) 若 $z\in D_\rho$ 并且 $z\neq z_0$，则 $f'(z)\neq 0$。

由恒等定理(定理 12)，若(ii)对充分小的 ρ 不满足，则在 z_0 附近，

f 是常数。类似地，若(iii)不满足，则在 z_0 附近 $f'=0$，因而 f 是常数。但是 $f'(z_0)$ 可以是 0，也可以不是 0。

由条件(ii)和定理 19，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f'(z)}{f(z)-f(z_0)}dz=n,$$

式中 n 是 $f-f(z_0)$ 在零点 z_0 的阶数。类似地，若 $\alpha\notin f(C_\rho)$，则

$$N(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f'(z)}{f(z)-\alpha}dz$$

是 $f-\alpha$ 在 C_ρ 内的零点数，即 f 在圆盘 D_ρ 上取值 α 的次数。由于 $N(\alpha)$ 是整数，若 $|N(\alpha)-n|<1$ 就有 $N(\alpha)=n$。考察给出 n 和 $N(\alpha)$ 的那两个积分。显然对一切 α，$|\alpha-f(z_0)|<\varepsilon$，即对于充分靠近 $f(z_0)$ 的一切 α，那两个积分相距小于 1。

对小的 ρ，ε，现在有一张图，如图 20 所示。当然，$\Delta_\varepsilon=\{\alpha;\ |\alpha-f(z_0)|<\epsilon\}$。若 $\alpha\in\Delta_\epsilon$，则正好有 n 个点 $z\in D_\rho$ 使 $f(z)=\alpha$。但其中可能包含了零点的阶数，例如，若 $\alpha=f(z_0)$，则 $f(z)-f(z_0)$ 的 n 个零点都是 z_0，z_0 是一个 n 次重复的零点。但是，对点 $\alpha\neq f(z_0)$，没有重数，因为 $f^{-1}(\alpha)$ 由 n 个不同点所组成。这是为什么？若 $f(w)=\alpha$，根据关于 ρ 的条件(iii)，则有 $f'(w)\neq 0$，所以，$f-\alpha$ 在 w 有一阶零点。



图 20

引理的结论可以大致概括为：若 f 在 z_0 解析，并且不是常数，则在 z_0 附近

$$f(z)=f(z_0)+a_n(z-z_0)^n+a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\cdots$$

式中 $a_n \neq 0$，并且在原点附近 f 的性状和 z^n 的性状在许多方面是一样的。从引理容易导出两个基本事实。

定理20（开映射定理） 设 f 是连通开集 D 上的非常数复解析函数，则 f 是一个开映射。即若 V 是 D 的开子集，则 $f(V)$ 是开集。

证明 设 z_0 是 V 中一点，V 是 D 的开子集。必须证明 $f(V)$ 是 $f(z_0)$ 的领域。由于 D 是连通的且 f 不是常数，$f-f(z_0)$ 在 z_0 有某一个阶数为 $n(1\leqslant n)$ 的零点。由上面的系，对小的 ρ，$D_\rho=\{z;\ |z-z_0|<\rho\}$ 在 f 下的象包含某一个半径为 $\varepsilon>0$ 的关于 $f(z_0)$ 的圆盘。由于对小的 ρ，$D_\rho\subset V$，就得到所需结果。

定理21 设 f 是平面中开集 D 上的复解析映射

$$D \xrightarrow{f} C.$$

(i) 若 $z_0\in D$，则 f 在 z_0 的邻域上为1:1的，当且仅当 $f'(z_0)\neq 0$；

(ii) 若 f 在 D 上是1:1的，则 f^{-1}：

$$D \xleftarrow{f^{-1}} f(D)$$

是复解析的。

证明 条款(i)是定理20前的引理的特殊情形。为了证明(ii)，注意到 f 是开映射，于是 $f(D)$ 是开集，从而 f^{-1} 是连续的。由于 f 是1:1的，在 D 上处处有 $f'(z)\neq 0$。现在可以看到，f^{-1} 在 $f(D)$ 中的每一点 $w=f(z)$ 是复可微的：

$$\lim_{\alpha\to w}\frac{f^{-1}(\alpha)-f^{-1}(w)}{\alpha-w}=\lim_{\alpha\to w}\frac{f^{-1}(\alpha)-z}{\alpha-f(z)}$$

$$=\frac{1}{f'(z)}.$$

我们也看到 $(f^{-1})'$ 是连续的，

$$(f^{-1})'(w)=[f'(f^{-1}(w))]^{-1}.$$

所以根据定理15，f^{-1} 是复解析的。

例 11 设 f 是指数函数，$f(z)=e^z$，则 f 是全平面上的解析函数。由于 $f'=f$，导数没有零点。f 是局部 1:1 的，但是在平面上，f 不是 1:1 的。因为

$$f(z+2n\pi i)=f(z).$$

显然，方程

$$w=e^z=e^x e^{iy},$$

当 $w\neq 0$ 时，对 z 可以求解。因此，f 的象是整个平面，但挖去一点，即 $\{w\in C; w\neq 0\}$。事实上，任一水平带

$$-\infty<x<\infty,$$

$$y_0<y\leqslant y_0+2\pi,$$

被 1:1 地映射到挖去了一点的平面上。固定 $w_0\neq 0$，选取任一 z_0，使 $w_0=e^{z_0}$。由定理 21 (这一情形是显然的)存在 z_0 的邻域 U，它被 f 以 1:1 的方式映射到 V，V 是 w_0 的一个邻域。还有，在 V 上的逆映射是解析的。所有这一切说明了什么呢？它是说，从任一 $w_0\neq 0$ 出发，给出 w_0 的任何一个对数 z_0，我们可以在 w_0 的邻域上取得对数，它是解析的，并且 $\ln w_0=z_0$。

习　题

1. (Schwarz 引理) 设 f 是单位圆盘上复解析函数，并且以 M 为界：

$$|f(z)|\leqslant M, \quad |z|<1.$$

若 $f(0)=0$，则在单位圆盘上，$|f(z)|\leqslant M|z|$。

2. 设 f 在单位圆盘上是复解析函数，并且

$$|f(z)|\leqslant 1, \quad |z|<1,$$

$$f'(0)=1.$$

证明 $f(z)=z$。提示：把 $f'(0)$ 表达成 $|z|=1$ 上的积分。

3. 设 $|\alpha|<1$，令

$$L(z)=\frac{z-\alpha}{1-\alpha^* z}, \quad |z|<1.$$

证明 L 是单位圆盘到单位圆盘上 1:1 的复解析映射。

4. 设 f 在单位圆盘上是复解析的，且 $|\alpha|<1$ 时，$f(\alpha)=0$，则

$$f(z)=\frac{z-\alpha}{1-\alpha^* z}\,g(z),$$

式中 g 是单位圆盘上的复解析函数，并且

$$\sup_{|z|<1}|f(z)|=\sup_{|z|<1}|g(z)|.$$

5. 设 f 在单位圆盘上是解析的，并且 $|f(z)|\leqslant M$。若 $f(\alpha)=0$，则

$$|f(z)|\leqslant M\left|\frac{z-\alpha}{1-\alpha^* z}\right|,\quad |z|<1.$$

如果对任一点 z 等式成立，则 f 必是习题 3 中函数 L 的常数倍数。

6. 设 f 是从单位圆盘到单位圆盘中的复解析映射。证明

$$\left|\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{1-f(\alpha)^* f(\beta)}\right|\leqslant\left|\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha^*\beta}\right|.$$

提示：利用习题 5 和函数

$$g(z)=\frac{f(z)-f(\alpha)}{1-f(\alpha)^* f(z)}.$$

7. 设 f 是单位圆盘到单位圆盘上的 1:1 的解析映射。证明

$$f(z)=c\cdot\frac{z-\alpha}{1-\alpha z},$$

式中 $|c|=1$ 且 $|\alpha|<1$。

8. 设 $\{f_n\}$ 是 D 上复解析函数序列，$\{f_n\}$ 一致收敛于 f。设 f 在 D 上某处有零点，则存在 N，对一切 $n\geqslant N$，f_n 在 D 上有零点。

9. 在题 8 中，在“有零点”的两个地方都换成“没有零点”，结论还成立吗？

10. 设 $p(z)$ 是次数 $n\geqslant 1$ 的多项式。证明

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{|z|=\rho}\left[\frac{p'(z)}{p(z)}-\frac{n}{z}\right]dz=0.$$

从定理 19 的观点来看，在适当大的圆盘内部，关于 p 的零点数有什么结论？

11. 证明

$$f(z)=\frac{1+z}{1-z}$$

把单位圆盘 1:1 地映射到右半平面 $\mathrm{Re}z>0$ 上。在 f 映射下，上半个单位圆盘的象是什么？

12. 举出一个 1:1 的解析映射，它把半个单位圆盘映射到整个单位圆盘上。提示：如同图 21 那样组成映射。

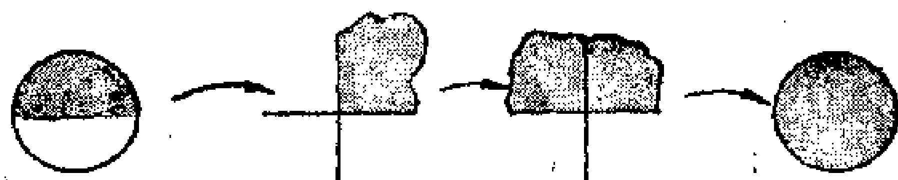


图 21

13. 直接用强最大原理证明开映照定理和没有零点的解析函数的倒数是解析的。

*14. (Rouche 定理) 设 f 和 g 在闭圆盘 $|z|\leqslant\rho$ 上是复解析的，并设在圆 $|z|=\rho$ 上，$|g(z)|<|f(z)|$。证明 f 和 $f+g$ 在圆盘 $|z|<\rho$ 上有相同个数的零点。

5.8 Fourier 级数

在实直线的区间上，甚至对某些十分光滑的函数，想把函数展开成幂级数的企图也会失败。当然，我们系统研究过的许多函数是实解析函数和它们的级数展开，这在各种问题中是重要的。但是，实解析函数类是极其特殊的，这就限制了幂级数的可应用性。现在我们要讨论有同等重要的一类级数展开——展开成三角（或 Fourier）级数。对区间上的任一光滑函数都可以有这样的展开。在许多数学问题（以及许多数学应用）中，展开成三角级数是自然而重要的。

设 f 是（复值）函数，定义在区间 $[-\pi,\pi]$ 上，我们要求把 f 展开成级数

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}. \tag{5.42}$$

这一展开相当于

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

式中

$$a_n=c_n+c_{-n},$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

我们将继续和指数函数打交道。

在绝对收敛条件下，Fourier 展开式(5.42)的含意是明确的。然而，展开式允许对更一般情况成立，我们要规定级数中项的次序。我们自然会取这样的**部分和**：

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

而(5.42)的含义是，$f(x) = \lim_n s_n(x)$。

对一个函数的 Fourier 展开，很容易求出系数 c_n。例如，若(5.42)一致收敛，就可以合法地计算

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x} dx,$$

$$= c_n$$

这是因为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x} dx = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ 1, & n = k. \end{cases}$$

因此，如果我们从 Riemann 可积函数 f 出发，f 的 Fourier 系数可定义为

(5.43) $$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

并且把形式级数

(5.44) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

叫做 f 的 **Fourier 级数**。我们要问：

(i) Fourier 级数收敛吗？

(ii) 如果收敛，它收敛于 f 吗？

我们只讨论分段连续函数的情况，虽然，这些结果对更一般的函数也有效。

我们将做一些基本的考察。我们希望把 f 展开成周期为 2π 的周期函数的级数。因此，为了要使级数在每一点收敛于 f，最好假定 $f(-\pi)=f(\pi)$。当然，由于改变 f 在有限个点的数值对 Fourier 系数 c_n 无影响，因此不能期望分段连续函数的 Fourier 级数在每一点收敛于 $f(x)$。于是，上述问题(ii)可以重新这样来提问：如果级数收敛，它最多在哪些点收敛于 f？

在我们对一般连续（或分段连续）函数讨论这两个基本问题(i)、(ii)之前，先讨论光滑函数 f。对 C^1 类函数 f，设它满足 $f(-\pi)=f(\pi)$。证明 Fourier 级数一致收敛于 f 不是太困难的。为了证明它，我们先证明 Fourier 系数趋于 0。

定理 22 (Riemann-Lebesgue) 设 f 是区间 $[a, b]$ 上的分段连续函数，则

$$\lim_{|t|\to\infty}\int_a^b f(x)e^{itx}\,dx=0.$$

证明 函数 f 本质上是有限个函数的和，这些函数中的每一个都在区间上一致连续，而在区间外等于 0。所以，只要对连续函数 f 证明定理就可以了。任何连续函数 f 都可以用阶梯函数来一致逼近，阶梯函数就是分段为常数的函数。为什么可以这样逼近呢？令 $\varepsilon>0$，根据 f 的一致连续性，存在 $\delta>0$，使得

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,\quad |x_1-x_2|<\delta.$$

选择 $[a, b]$ 的一个划分 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，使得 $x_k-x_{k-1}<\delta$，$k=1, \cdots, n$。定义

$$s(x)=f(x_{k-1}),\quad x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k,$$

（见图 22）则 s 分段为常数，而且 s 与和函数 f 相距一致地小于 ε，

$$|f(x)-s(x)|<\varepsilon,\quad a\leqslant x\leqslant b$$

因此，只要对阶梯函数证明定理成立就可以了。要使定理成立，还缺一段证明。我们把它留作习题。

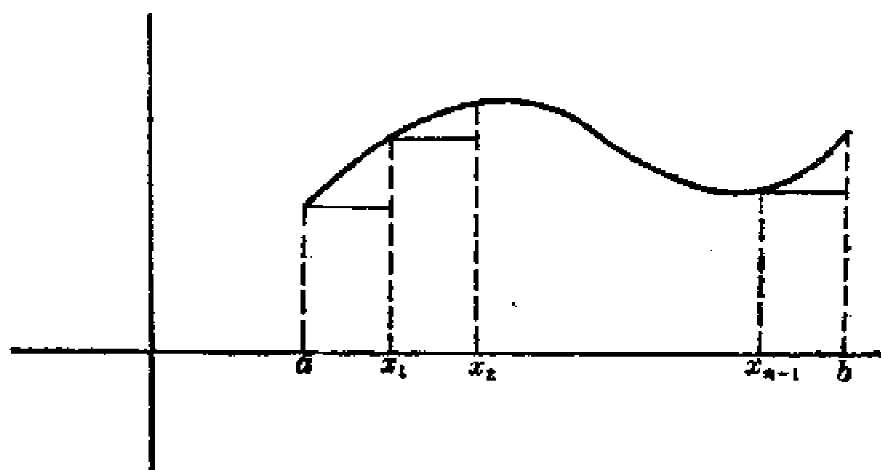


图 22

现在，对阶梯函数证明是容易的，因为每一个阶梯函数是有限个函数的和，这些函数在某个区间上是常数，在那个区间外是 0。因此，只需要对常数函数证明结果，即证明

$$\lim_{|t|\to\infty}\int_a^b e^{itx}\,dx=0.$$

这是容易检验的，因为积分可以确切地计算出来：

$$\int_a^b e^{itx}\,dx=\frac{1}{it}e^{itx}\Big|_a^b,$$

$$\left|\int_a^b e^{itx}\,dx\right|\leqslant\frac{2}{|t|}.$$

系 若 f 是分段连续函数，则

$$\lim_{|t|\to\infty}\int_a^b f(x)\cos tx\,dx=\lim_{|t|\to\infty}\int_a^b f(x)\sin tx\,dx=0.$$

除了分段连续函数外，还有更多的函数成立 Riemann–Lebesgue 定理。例如，对于 Riemann 可积函数，以及 Lebesgue (第 7 章)意义下"可积"的函数，Riemann–Lebesgue 定理都有效。我们感兴趣的是，Riemann–Lebesgue 定理证明了 f 的 Fourier 级数在点 x 是否收敛只依赖于 f 在 x 附近的性态。

引理 设 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上分段连续函数，则 f 的 Fourier 级数的第 n 个部分和是

(5.45) $$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt.$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}s_n(x)&=\sum_{k=-n}^{n}c_k\,e^{ikx}\\&=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}\,dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_n(x-t)\,dt,\end{aligned}$$

式中

$$D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}.$$

令 $f(x+2\pi)=f(x)$，就可以把 f 扩张成实直线上的分段连续函数。(至于函数在 π 和 $-\pi$ 的值，它们不影响所考虑的积分。) 作代换 $u=x-t$ 得到

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}f(x-u)D_n(u)\,du,$$

由于 f，D_n 都是周期 2π 的函数，所以

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)D_n(u)\,du$$

为了证明引理，剩下的只要计算：

$$\begin{aligned}D_n(x)&=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}=\sum_{k=0}^{n}+\sum_{k=-1}^{-n}\\&=\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1}+\frac{e^{-i(n+1)x}-1}{e^{-ix}-1}-1\\&=\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{1-\cos x}\\&=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}\end{aligned}$$

序列$\{D_n\}$叫做 Dirichlet 核。

定理 23 设f是实直线上周期为2π的分段连续函数，则在f的任一可微点，f的 Fourier 级数收敛于$f(x)$。

证明 结论是对实直线上的周期函数叙述的。为了使在$[-\pi, \pi]$端点的可微性的意义明确，如果f是$[-\pi, \pi]$上的函数，并且用$f(x+2\pi)=f(x)$把f扩张成周期函数，则扩张后的函数只有当$f(\pi)=f(-\pi)$和$f'(\pi)=f'(-\pi)$时在π处才可微。这一假定比在区间$[-\pi, \pi]$上对应函数的可微性要强。

设x是f的可微点，我们有

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt, \tag{5.46}$$

式中

$$D_n(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}.$$

如果我们对常数函数 1 利用(5.46)，就得到

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt. \tag{5.47}$$

用常数$f(x)$乘(5.47)，再从(5.46)减去所得的式子，有

$$\begin{aligned} s_n(x)-f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x-t)-f(x)]D_n(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x-t)-f(x)}{t}\,t\,D_n(t)dt. \end{aligned} \tag{5.48}$$

由于f在x点可微，差商

$$\frac{f(x-t)-f(x)}{t}$$

在$-\pi\leqslant t\leqslant\pi$是分段连续的(在 0 点的值可适当定义)。现在

$$tD_n(t)=\frac{t}{\sin\frac{1}{2}t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t,$$

上式右边的第一个因子是分段连续的，因为它在 $t=0$ 有极限 2. 于是

$$s_n(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt,$$

式中 h 是分段连续的. 根据 Riemann-Lebesgue 定理(的系)，就有

$$\lim_n[s_n(x)-f(x)]=0.$$

把这个定理加强，使在任一闭区间上 f 是 C^1 类函数，则部分和 s_n 一致收敛于 f. 要证明加强了的定理也不太困难. 在习题 10—13 中，我们指出了做法. 在后文中，有一个更一般的收敛定理，而这个结果将是它的一个简单的推论.

定理 23 的假设还可减弱些. 例如，设 f 是在 x 处连续，在 x 附近为有界变差，则 $s_n(x)$ 收敛于 $f(x)$；但对 f 的光滑性条件不能削弱太多. 若 f 只不过在 x 连续，在 x 处 Fourier 级数就不一定收敛. 这是令人失望的，但也并不是什么灾难. 在 Fourier 级数的研究中最古老的问题之一还只是几年以前，当瑞典数学家 Lennart Carleson 证明了连续函数(甚至可积函数)的 Fourier 级数"几乎处处"收敛于函数后才解决的. 这个证明和我们的想法相距并不远，但是目前对我们来说证明太长了，也太难了点.

大概到目前为止，比 Carleson 更重要的结果是，连续函数的 Fourier 级数既然不一定在一切点上收敛于函数，那么我们可用其它方法考察一下由 Fourier 级数所给出的函数. 下述著名的 **Cesaro 求和法**就是这样的一种方法. 作平均

$$\sigma_n=\frac{1}{n}(s_0+\cdots+s_{n-1}). \tag{5.49}$$

这些函数叫做 f 的 Fourier 级数的 **Cesaro 平均**. 关于它有一个定理，若 f 是连续的，并且 $f(-\pi)=f(\pi)$，则 Cesaro 平均 σ_n 一致

收敛于 f。我们不打算证明这个结果，因为在下一节中，我们将证明一个类似的结果，就是有名的 Abel-Poisson 求和法。Abel-Poisson 求和法是一个富有启发性的方法。

习　题

1. 函数

$$f(x)=\sin x\cos 2x$$

的 Fourier 级数是什么？（只要想一想，不要计算任何一个积分。）

2. 设 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上 $f(-\pi)=f(\pi)$ 的 C^2 类函数。用分部积分法证明

$$\sum_n |c_n|<\infty.$$

3. 设 f 是 C^2 类的函数，且 $f(-\pi)=f(\pi)$，则 f 的 Fourier 级数一致收敛于 f。

4. 设 f 是 C^1 类函数，$f(-\pi)=f(\pi)$，那么 f' 的 Fourier 级数可以对 f 的 Fourier 级数逐项求微分得到吗？

5. 设 f 是偶函数，$f(-x)=f(x)$，则它的 Fourier 系数满足 $c_{-n}=c_n$，因而 Fourier 级数确实是一个"余弦级数"。关于奇函数 $f(-x)=-f(x)$ 有什么结果？

6. 设 $\{f_n\}$ 是分段连续函数序列，对其中每一个函数，Riemann-Lebesgue 定理成立。如果 f_n 一致收敛于 f，证明 Riemann-Lebesgue 定理对 f 仍有效。

7. 证明在习题 6 中只要知道

$$\lim_n \int_{-\pi}^{\pi}|f_n-f|=0$$

就足够了。

8. 设 f 是如下意义的分段连续函数：$[-\pi,\pi]$ 有一个划分，在这个划分的每一个开区间上，f 是连续而有界的。利用习题 7 证明关于这类函数 f 的 Riemann-Lebesgue 定理。

9. 利用习题 8 证明，若 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上的分段连续函数，并且在 x 点对一切 y 满足 Lipschitz 条件：

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|,$$

则 $s_n(x)$ 收敛于 $f(x)$。

10. 设 f 是实直线上函数，若 $t\in R$，f_t 是 f 的 t 平移：

$$f_t(x)=f(x+t)。$$

若 f 是分段连续函数，证明 f 的平移在下述意义下连续：

$$\lim_{t\to 0}\int_a^b |f(x)-f_t(x)|dx=0。$$

提示：若 f 是连续的，可由一致连续性得到。若 f 是分段连续的，则存在连续函数 g，使 $\int|f-g|<\varepsilon$。

11. 设 f 是分段连续的，令 $0<\delta\leqslant\pi$。证明

$$\lim_n\int_\delta^\pi f(t)D_n(t)dt=0。$$

12. 设 f 是实直线上的分段连续函数，$0<\delta\leqslant\pi$。证明对 $x\in[-\pi,\pi]$，一致地有

$$\lim_n\int_\delta^\pi f(x-t)D_n(t)dt=0。$$

提示：利用习题 10 和 11。

13. 设 f 是 C^1 类函数，证明 f 的 Fourier 级数一致收敛于 f。建议：你需要证明下式关于 x 一致地成立：

$$\lim_n\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x-t)-f(x)}{t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt=0。$$

选择 δ，$0<\delta\leqslant\pi$，使得当 $|t|\leqslant\delta$ 时(对一切 x)，差商在 $f'(x)$ 的 ε 邻域内。把积分拆开成 $[-\delta,\delta]$ 上的积分加上剩下的积分。再把习题 12 用到剩下的积分上。

*14. 级数

$$\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}e^{inx}$$

是分段连续函数的 Fourier 级数。找出那个函数。

*15. 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{inx}$$

不是分段连续函数的 Fourier 级数。

5.9 Abel–Poisson 求和

设 f 是区间 $[-\pi,\pi]$ 上复值函数，$f(-\pi)=f(\pi)$，则 f 可以看作复平面中单位圆上的函数：

$$(5.50) \qquad f(e^{i\theta}) = F(\theta), \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$$

若 f 在$[-\pi, \pi]$上(分段)连续，则在圆上对应的函数是(分段)连续的。现在，剩下的问题不多了，但还有一件重要的事情。当我们把 f 看作单位圆上的函数时，还遗漏了一些事情。特别，想起了在 Fourier 级数和复幂级数之间的强联系。这种联系导致我们讨论关于 Fourier 级数的 Abel-Poisson 求和法。

先从特殊情形开始。设 f 是关于原点的半径大于 1 的圆盘中的复解析函数：

$$(5.51) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < 1 + \varepsilon.$$

现在

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}, \quad 0 \leqslant r < 1 + \varepsilon.$$

特别，限制 f 是单位圆上的连续函数，函数的 Fourier 级数就是

$$(5.52) \qquad f(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

对每一个 r，在单位圆上有函数 f_r，

$$(5.53) \qquad f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}),$$

f_r 的 Fourier 系数是

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} f_r(e^{i\theta})d\theta = \begin{cases} a_n r^n, & n \geqslant 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

由于 f 在 $|z| < 1 + \varepsilon$ 上连续，

$$\lim_{r \to 1} f_r = f.$$

而且，在单位圆上，这收敛性是一致的。

这就是 Abel-Poisson 求和的想法。从单位圆上的分段连续复值函数 f 出发，令 c_n 是 f 的第 n 个 Fourier 系数。定义

$$(5.54) \qquad f_r(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}, \quad 0 \leqslant r < 1.$$

这样做的意义是什么呢？序列$\{c_n\}$是有界的。

$$|c_n| \leqslant \sup\{|f(z)|; |z|=1\}.$$

于是，显然若 $r<1$，(5.54)中的级数是一致绝对收敛的，这是因为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} = 2(1-r)^{-1}-1, \quad 0 \leqslant r < 1.$$

现在，我们要证明(当 $r \to 1$)f_r(至多在哪些点)收敛于 f. 首先，我们可以得到 f_r 的积分表示：

$$\begin{aligned} f_r(e^{i\theta}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-int}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \left[\sum_n r^{|n|} e^{in(\theta-t)}\right] dt. \end{aligned}$$

于是我们有

$$f_r(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_r(\theta - t)\, dt, \tag{5.55}$$

式中

$$\begin{aligned} P_r(\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-in\theta} \\ &= \frac{1}{1-re^{i\theta}} + \frac{1}{1-re^{-i\theta}} - 1 \\ &= \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}. \end{aligned}$$

这一族函数$\{P_r\}$叫做 **Poisson 核**. 这族函数具有三条性质：

(i) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)\, d\theta = 1$;

(ii) $P_r \geqslant 0$; $P_r(-\theta) = P_r(\theta)$;

(iii) 若 $0<\delta<\pi$，则

$$\lim_{r\to 1} \sup\{P_r(\theta); \delta \leqslant |\theta| \leqslant \pi\} = 0.$$

性质(ii)是显然的。对常数函数 $f=1$ 应用(5.55)，不需要计算就可得到(i)。(iii)是什么意思呢?它是说，固定 0 的一个小邻

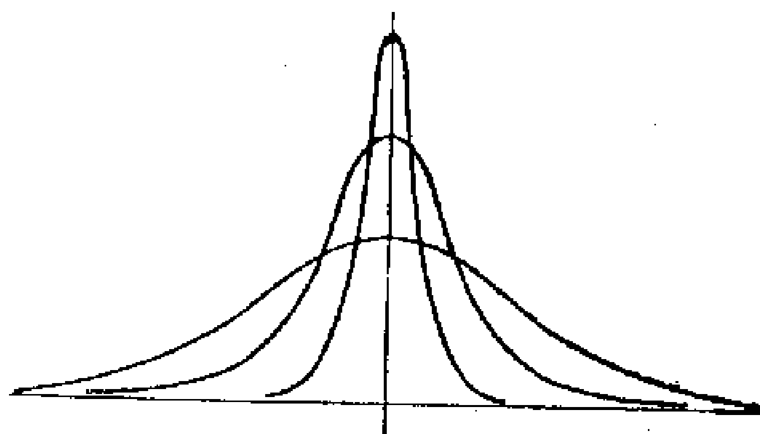


图 23

域，在$[-\pi, \pi]$内但除去这个小邻域，当$r\to 1$时P_r一致地趋于0。另一方面，当$r\to 1$时$P_r(0)$趋于∞，这些事情可从图23看出。

为了仔细的验证(iii)，应该注意到

$$P_r(\theta)\leqslant \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2}, \quad \delta\leqslant|\theta|\leqslant\pi.$$

定理 24 设f是单位圆上的分段连续函数，它有Fourier系数$\{c_n\}$。那么在f的每一个连续点$e^{i\theta}$上，当r趋于1时，Abel-Poisson平均

$$f_r(e^{i\theta})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n r^{|n|}e^{in\theta}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{it})P_r(\theta-t)dt$$

收敛于$f(e^{i\theta})$。在f是连续的每一段闭弧上，收敛性是一致的。

证明 令

$$g(t)=f(e^{it}),$$

于是g就是实直线上周期为2π的函数。用这个方法，我们很方便地把f看作实直线上周期为2π的函数，在下面，我们约定仍用f来记这个周期函数。于是

$$f_r(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)P_r(\theta-t)dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta-t)P_r(t)dt.$$

从而

$$f(\theta)-f_r(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(\theta)-f(\theta-t)]P_r(t)\,dt,$$

$$|f(\theta)-f_r(\theta)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)-f(\theta-t)|P_r(t)dt,$$

(刚才利用了 P_r 的性质(i)和(ii))。

令 $\varepsilon>0$。设 f 在 θ 连续，可选择 $\delta>0$，使得

(5.57) $$|f(\theta)-f(t)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |\theta-t|<\delta,$$

则

$$|f(\theta)-f_r(\theta)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(\theta)-f(\theta-t)|P_r(t)dt$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|\geqslant\delta}$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|\geqslant\delta}|f(\theta)-f(\theta-t)|P_r(t)dt$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+K\sup\{P_r(t);\quad \delta\leqslant|t|\leqslant\pi\},$$

式中

$$K=2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt.$$

从 P_r 的性质(iii)，当 r 在 1 附近时，我们有

$$|f(\theta)-f_r(\theta)|<\varepsilon,$$

若 f 在弧 $a\leqslant\theta\leqslant b$ 上连续，则由一致连续性，可选择 δ，使(5.57)对 θ 一致地成立，于是我们的不等式就说明了在弧上 f_r 一致收敛于 f。

系 若 f 在单位圆上是连续的，并且

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} f(e^{i\theta})d\theta = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

则 $f = 0$。

系 设 f 在单位圆上连续，则 f 可用三角多项式：

$$p(e^{i\theta}) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{in\theta}$$

一致逼近。

证明 选择 r 使 f_r 一致地逼近 f。于是对 f_r 取级数的部分和为

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

就可得到证明。

系（Weierstrass 逼近定理） 设 f 是实直线的闭区间 $[a, b]$ 上的连续复值函数，则 f 可以用多项式一致逼近。

证明 显然可以假定区间是 $[a, \pi]$，$-\pi < a < \pi$。把 f 扩张成 $[-\pi, \pi]$ 上的连续函数，使 $f(-\pi) = f(\pi)$（只需利用一条直线）。若 $\varepsilon > 0$，存在三角多项式

$$g(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx},$$

使 $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$。每一个 e^{inx} 可以展开成 x 的幂级数。于是，存在复系数的多项式

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{N_n} a_{nk} x^k.$$

因此在 $[-\pi, \pi]$ 上 $|e^{inx} - p_n(x)|$ 一致地小。多项式

$$p(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n p_n(x)$$

将一致地逼近 f。

定理 25 设 f 是区间 $[-\pi, \pi]$ 上的分段连续函数。c_n 是 f 的第 n 个 Fourier 系数，s_n 是 f 的 Fourier 级数的第 n 个部分和，则

(i) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx$;

(ii) $\lim_n\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-s_n(x)|^2dx=0$.

证明 令 $r<1$，从级数

$$f_r(e^{i\theta})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n r^{|n|}e^{in\theta}$$

的一致收敛性容易计算

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_r(e^{i\theta})|^2d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_r(e^{i\theta})f_r(e^{i\theta})^*d\theta$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2r^{2|n|}.$$

现在，令 r 趋于1，若 f 是连续的，则 f_r 一致收敛于 f，所以得到对 f 的结论(i)。当 f 在 $a\leqslant\theta\leqslant b$ 上连续，在区间外是0时，论证可同样进行。由于分段连续函数是有限个这种函数(忽略有限个点的值)的和，于是，对每一个分段连续函数成立关系(i)。

为了证明(ii)，计算

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-s_n(x)|^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx-\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2,$$

再应用(i)即可。

系 设 f 是单位圆上的 C^1 类函数，则 f 的 Fourier 级数一致收敛于 f。

证明 我们有

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt.$$

由分部积分法，f' 的第 n 个 Fourier 系数是

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)e^{-inx}dx=\frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx=inc_n.$$

因此，f' 的 Fourier 级数的第 n 个部分和是 s_n'，而 s_n' 是 f 的 Fourier 级数的第 n 个部分和的导数。所以，

$$f(x)-s_n(x)=f(0)-s_n(0)+\int_0^x [f'(t)-s_n'(t)]dt$$

$$|f(x)-s_n(x)|\leqslant|f(0)-s_n(0)|+\int_0^{2\pi}|f'(t)-s_n'(t)|dt.$$

根据定理 23, $s_n(0)$收敛于 $f(0)$. 由 Schwartz 不等式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g|\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

可得到

$$\lim_n\int_0^{2\pi}|f'(t)-s_n'(t)|^2dt=0.$$

Schwartz 不等式的证明留作习题.

习 题

1. 设 f 是单位圆上分段连续函数, 假如 f 的一切 Fourier 系数都是非负实数. 证明 f 的 Fourier 级数一致收敛于 f.

2. 对分段连续函数 f 和 g, 定义

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)^*dx.$$

(a) 证明$\langle\cdot,\cdot\rangle$是分段连续函数空间上的伪内积, 伪内积满足条件:

(i) $\langle cf+g,h\rangle=c\langle f,h\rangle+\langle g,h\rangle$;

(ii) $\langle g,f\rangle=\langle f,g\rangle^*$;

(iii) $\langle f,f\rangle\geqslant 0$.

(b) 证明成立 Cauchy-Schwartz 不等式:

$$|\langle f,g\rangle|^2\leqslant\langle f,f\rangle\langle g,g\rangle,$$

(参阅 Euclid 空间的证明).

3. 利用定理 25 证明, 若 f 有 Fourier 系数 a_n, g 有 Fourier 系数 b_n, 则

$$\langle f,g\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nb_n^*,$$

(记号$\langle f,g\rangle$见习题 2).

4. 设 f 和 g 是单位圆上的分段连续函数, 定义卷积 $f*g$:

$$(f*g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)g(t)dt.$$

证明

(a) $f*g=g*f$;

(b) $f*(g+h)=f*g+f*h$;

(c) 若 f 有 Fourier 系数 a_n 和 g 有 Fourier 系数 b_n，则 $f*g$ 有 Fourier 系数 $a_n b_n$。

5. 设 f 和 g 是分段连续函数，则卷积 $f*g$ 的 Fourier 级数一致收敛于 $f*g$（提示：利用定理 25 和习题 4(c)）。

6. 将习题 4 定义的卷积作为一种乘法。如果这个乘法有一个恒等元（对一切 f，$e*f=f$）则 e 的 Fourier 级数是什么？（用习题 4(c)）它是一个函数的 Fourier 级数吗？（见习题 1 或定理 25）。

7. 设 f 是实直线上函数，f 的 t 平移是：

$$f_t(x)=f(x+t).$$

f 的 Fourier 系数和函数 f_t 的 Fourier 系数之间有什么关系？

8. 若 f 有 Fourier 系数 c_n，用 k 平移系数：

$$a_n=c_{k+n}$$

那么，什么函数能以 a_n 作为它的 Fourier 系数序列？

9. 用习题 8 的结果证明，如某个函数 f 有 Fourier 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx},$$

则函数必须满足

(i) $f(x)=0,\ x\neq 0$;

(ii) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=1$。

Dirac 把这个函数叫做"δ 函数"。显然，按照我们对函数的定义，不存在这样的函数。但是，可以找到一个有界变差函数 F，使得对一切 n，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\,dF(x)=1.$$

10. 先看一下图 23。看来 Poisson 核好象收敛于（当 r 趋于 1 时）习题 9 中的神秘的 δ 函数？f 和"不存在"的 δ 函数的卷积是什么？从这些事情看来，当 r 趋于 1 时，$f*P_r$ 收敛 f 似乎是可能的？

11. 设 f 是在闭圆盘 $|z|\leqslant 1$ 上的连续函数，在开圆盘 $|z|<1$ 上复解析。于是 f 在单位圆 $|z|=1$ 上定义了一个函数，这个函数满足条件

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})e^{in\theta}\,d\theta=0,\quad n=1,2,3,\cdots$$

证明：若我们给定了圆周上的连续函数，它满足上述条件，则它一定可扩张成闭圆盘$|z|\leqslant 1$上连续而在开圆盘$|z|<1$上解析的函数。

12. 在闭单位圆盘$|z|\leqslant 1$上哪些函数可以用多项式$p(z)$一致逼近？请与 Weierstrass 逼近定理作比较。

13. 我们曾提到过f的 Fourier 级数的 Cesaro 平均：

$$\sigma_n=\frac{1}{n}(s_0+s_1+\cdots+s_{n-1}),\quad n=1,2,3,\cdots$$

证明

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)K_n(x-t)dt,$$

式中K_n是形式级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{inx}$$

的第n个 Cesaro 平均。验证序列$\{K_n\}$满足类似于 Poisson 核的性质(i)，(ii)和(iii)的条件(是正的，积分为 1，等等)。利用这些性质证明在圆周上的连续函数f的 Cesaro 平均一致收敛于f。

5.10 Dirichlet 问题

如果在平面中开集上的（复值）函数u是C^2类函数，并且满足 Laplace 方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

函数u就叫做调和函数。在我们从事于复解析性的讨论时，曾遇到过这种函数。关于它们，我们不准备多说了，只是提请注意一点：一个解析函数是调和的，那么，它的实部和虚部都是调和函数。有很多理由可以说明调和函数是重要的。因此，我们才用这一小节来介绍它们的几个基本性质。这些讨论对于处理幂级数和 Fourier 级数也是有帮助的。

定理 26（平均值性质） 设u是平面中开集D上的调和函数。并设闭圆盘$\{z;|z-z_0|\leqslant\rho\}$包含在$D$中，则

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(z_0+\rho e^{i\theta})\,d\theta.$$

证明 为了方便，象通常一样，不妨设 $z_0=0$. 由于 u 是 C^2 类函数，它有连续的二阶径向导数和角导数(除了原点)。简单计算一下就可知道在这些导数下，Laplace 方程是：

(5.58) $$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0.$$

定义

$$I(r)=r\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial u}{\partial r}d\theta,\quad 0<r\leqslant\rho.$$

根据 Laplace 方程(5.58)，

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial r}&=-\frac{1}{r}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}d\theta\\&=-\frac{1}{r}\left.\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|_{-\pi}^{\pi}=0.\end{aligned}$$

于是 $I(r)$ 是常数，显然有

$$\lim_{r\to 0}I(r)=0,$$

所以 $I(r)=0$。换言之

(5.59) $$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial u}{\partial r}d\theta=0,\quad 0<r\leqslant\rho.$$

现在利用这个事实来计算，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(\rho e^{i\theta})\,d\theta&=u(0)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_0^{\rho}\frac{\partial u}{\partial r}dr\right]d\theta\\&=u(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\rho}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial u}{\partial r}d\theta\right]dr=u(0).\end{aligned}$$

系（弱最大原理） 设 V 是平面中的有界开集。u 是在 $\overline{V}$ 上连续而在 V 是调和的函数，则 $|u(z)|$ 在 $\overline{V}$ 上的最大值出现在 V 的边界上。在 u 是实值的情形，$u(z)$ 在 $\overline{V}$ 上的最大值和最小值都在 V 的边界上达到。

证明 可仿照对解析函数的做法，用平均值性质推出。

最大原理的一个特别推论是：V 上的调和函数如果在 V 的边界上为 0，则调和函数是 0。每一个调和函数都可由它在边界上的值所决定。对开集 V 的 **Dirichlet 问题**是：假如我们在 V 的边界上给定了一个(连续)函数，我们能否找到一个 V 上的调和函数，使它在边界上取给定的值呢？这问题还可以说得更正确些。对一般开集 V，实际情况要复杂得多，但当 V 是圆盘时，是可以很好地做到的，其实在上节已经做了，只不过没有这样说。我们在这里再重述这一结果。

定理 27 设 f 是单位圆周上的连续函数，则存在在闭圆盘上连续，在开圆盘内调和的函数 F，并且 F 在单位圆周上和 f 一致。这个函数 F 是唯一的，它可以由 Poisson 积分公式给出：

$$F(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{it})P_r(\theta-t)\,dt.$$

证明 我们注意到，若存在这样一个函数 F，那末它是唯一的。用 Poisson 公式把 F 定义在开圆盘上，并定义 $F(e^{i\theta})=f(e^{i\theta})$。根据定理 5.23，关于 θ 一致地有

$$\lim_{r\to1}F(re^{i\theta})=f(e^{i\theta}).$$

由此得到 F 在闭单位圆盘上是连续的。

为什么在开单位圆盘上 F 是调和的？可以有几种方法来看出这一点。一个办法是通过计算来证明 F 满足 Laplace 方程，这时就需要在积分号下求微分。调和性质来自函数 $P(r,\theta)=P_r(\theta)$ 是调和的事实。但是我们通过下面的方法来验证 F 是调和的。我们有

$$P_r(\theta-t)=\mathrm{Re}\left[\frac{e^{it}+re^{i\theta}}{e^{it}-re^{i\theta}}\right].$$

假如 f 是实值的，则

$$F(z)=\operatorname{Re}h(z),$$

式中

$$h(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{it})\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt.$$

显然，h 在 $|z|<1$ 上是复解析的。因此F是一个实解析函数的实部，从而是调和的。

系 实值函数是调和的当且仅当该函数局部地是一个解析函数的实部。

证明 设u是开集V上的实值调和函数，若$z_0\in V$，令D是包含z_0并位于V内的任一圆盘。根据定理的证明，存在函数h，在D上解析，使得$u(z)=\operatorname{Re}h(z)$，$z\in D$。

系 设V是平面中的连通开集，u是V上的调和函数。若u在V的一个非空开子集上等于0，则$u=0$。

证明 可以假定u是实值的。设D是一切开集U的并集，开集U具有性质：$U\subset V$，$u(z)=0$，$z\in U$，则D是V的非空开子集。我们将证明D相对于V是闭的，由于V是连通的，这样就可以证明定理的结果。

设w是V中的点也是$\overline{D}$中的点。选择开圆盘W，使$w\in W\subset V$。从D的定义和$w\in\overline{D}$的事实，u在W的非空开子集上等的0。但是，在W上，我们有$u=\operatorname{Re}h$，式中h是解析的。所以在W的非空开子集上h是纯虚数(因此是常数)。于是h是一个纯虚的常数。所以u在W上是零。结论：$w\in D$。

系（强最大原理） 设u是连通开集V上的实值调和函数，则除非u是常数，u不能在V上达到最大值或最小值。

证明 平均值性质说明当函数u在V中达到最大值或最小值的点的某一邻域中是常数。根据前一个系，就可以证明。

系 设u是平面中开集V上的一个连续复值函数，则u是调

和函数当且仅当 u 具有平均值性质。

证明 这是一个局部的定理，即我们只需要在圆盘上证明它。所以，设 u 在 $|z|\leqslant 1$ 上连续，在每一个包含在单位圆盘内的圆盘 $|z-z_0|\leqslant\rho$ 上具有平均值性质：

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta.$$

设 v 是 $|z|<1$ 上的调和函数，它在 $|z|\leqslant 1$ 上是连续的，而在单位圆周上和 u 一致，则 u 和 v 都具有平均值性质，所以 $u-v$ 也具有平均值性质。于是在单位圆周上达到了 $|u-v|$ 的最大值，但是 $u-v=0$，结论：$u=v$，所以 u 是调和的。

习 题

1. 设 f 是复解析函数，而 u 是调和的，则复合 $u\circ f$ 是调和的。

2. 若 u 是单位圆盘上的调和函数；存在序列 $\{z_n\}$，使 $z_n\to 0$，且 $u(z_n)=0$，则 $u=0$。这个结论成立吗？

3. 证明：单位圆盘上函数是调和的当且仅当存在数列 c_n，使在圆盘上有

$$u(re^{i\theta})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n r^{|n|}e^{in\theta}.$$

4. 设 u 是全平面上的调和函数。证明 $u=\mathrm{Re}f$，而 f 是平面上的解析函数。

5. (Liouville) 设 u 是平面上调和函数，若 u 是有上界或有下界的，则 u 是常数。

6. 设

$$u(re^{i\theta})=\ln r,\quad r\neq 0.$$

证明在挖去一点的平面上，u 是调和的。在挖去一点的平面上是否存在解析函数 f，使 $u=\mathrm{Re}f$？

7. 设 $p(x,y)$ 是两个实变数的实系数多项式。这种多项式哪些是平面上的调和函数，哪些不是。若 $p(x,y)$ 是调和的，是否存在复多项式 $f(z)$，使 $p(x,y)=\mathrm{Re}\,f(x+iy)$？

8. (Harnack) 设 u 是单位圆盘中非负调和函数，证明

$$\frac{1-r}{1+r}u(0)\leqslant u(re^{i\theta})\leqslant\frac{1+r}{1-r}u(0).$$

9. 调和函数的一致极限是调和的。

10. (Harnack 定理) 设$\{u_n\}$是连通开集D上的实调和函数序列，又是增加的：$u_1\leqslant u_2\leqslant\cdots$。设

$$u(z)=\lim_n u_n(z),$$

则u是以下两种情况之一：对每一个$z\in D$，$u(z)=\infty$或u是D上调和函数。提示：参见习题8和9。

第 6 章　赋范线性空间

6.1　线性空间和范数

我们要考虑比 Euclid 空间更普遍的一类空间．这样做有以下三条理由：

1．这种讨论将使我们对于在这方面已经做过的工作加深理解．

2．这种专门名词将帮助我们清楚而又自然地建立还没有处理过的一些结果．

3．更普遍的概念将为在下一章中彻底讨论积分铺平道路．

定义　实数域或复数域上的向量空间称为**线性空间**．

于是，线性空间是由集 L, L 上的向量加法和向量与数量的乘法所组成．向量加法应该满足：

1．加法是可交换的，

$$x+y=y+x.$$

2．加法是可结合的，

$$(x+y)+z=x+(y+z).$$

3　在 L 中存在唯一的零向量 0，使得对 L 中一切 x，

$$0+x=x.$$

4．对 L 中的每一个 x，在 L 中对应有唯一的向量 $-x$，使

$$x+(-x)=0.$$

数量乘法要求满足

5．
$$(ab)x=a(bx),$$

6. $$1x = x,$$

有两个分配律和向量加法有关：

7. $$c(x+y) = cx + cy,$$

8. $$(a+b)x = ax + bx.$$

在**实线性空间**情形，用实数域中的 c 乘向量 x；在**复线性空间**的情形，用复数域中的 c 乘向量 x。这两种都是**数量场**。

对线性空间 L，如果它的某一个子集在 L 的线性运算下是“封闭”的，这就给我们提供了另一个线性子空间的例子。L 的一个**线性子空间**是满足以下条件的一个子集 M：

(i) 若 $x, y \in M$，则 $(x+y) \in M$；

(ii) 若 $x \in M$，则对一切数量 c，$(cx) \in M$。

我们遇到的线性空间几乎都是函数空间——在某个集上的函数空间的子空间。这一类空间是十分丰富的，它很自然的包括了分析中的许多问题。

例 1 设 S 是任一集。S 上实值（复值）函数的全体组成一个实（复）线性空间，其中的运算是

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s),$$

$$(cf)(s) = cf(s).$$

对于 $S = R$ 的特殊情况，所讨论的基本空间是实直线上一切实值（复值）函数的空间。下面是一列递减的子空间序列，连续函数空间，可微函数空间，C^1 类函数空间，C^k 类函数空间，…，C^∞ 函数空间，实解析函数空间，多项式空间，次数最多是 n 的多项式空间，…，仿射函数空间，线性函数空间，零函数空间。

当 S 是区间 $[0, 1]$ 时，另一个函数空间的递减链是有界函数空间，有界变差函数空间，连续可微函数空间，满足齐次微分方程 $f'' + f = 0$ 的函数空间。

当 S 是由前 n 个正整数组成时，即 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$，在 S 上

实值函数是一个有序的 n 维的 $x=(x_1, \cdots, x_n)$。因此 S 上实值函数空间是基本空间 R^n。在第一章介绍了 R^n 的子空间，每一个子空间的维数是 k，$0 \leqslant k \leqslant n$，子空间可以由坐标 $x_1, \cdots, x_n$ 上的 $(n-k)$ 个齐次线性条件所定义。当 $n=3$ 时，除了子空间 R^3 和 $\{0\}$ 外，还有过原点的平面和过原点的直线。

设 S 是正整数集，S 上函数空间是实(复)数序列 $x=(x_1, x_2, x_3, \cdots)$ 的空间。在子序列例子中，我们将要提到这个序列空间的某些重要的子空间。

分析中有许多问题是要处理线性空间中的逼近和收敛性问题。通常是用定义在向量上的下列函数来规定逼近的程度，它推广了长度概念。

定义 设 L 是线性空间，L 上的**半范数**是 L 上的实值函数 $\|\cdots\|$，具有下列性质：

(i) $\|x\| \geqslant 0$；

(ii) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$（三角不等式）；

(iii) $\|cx\| = |c| \|x\|$。

如果半范数还满足

(i)′ 若 $\|x\|=0$，则 $x=0$，

就称为**范数**。

一个[半]**赋范线性空间**是一个在 L 上定义了[半]范数的线性空间 L。

例 2 在线性空间 R^n 上定义范数

$$\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}.$$

这个赋范线性空间就称为 n 维 **Euclid 空间**，这个特殊的范数 $\|\cdots\|$ 可当作长度。在 R^n 上还有既重要而有用的另一些范数，如

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|,$$

(6.1)

$$\|x\|_\infty = \max_k |x_k|.$$

我们来介绍一个 R^n 上更一般的范数。设 p 是数，$1 \leqslant p < \infty$，并定义

(6.2) $$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

由于证明 $\|x\|_p$ 满足三角不等式当 $p \neq 2$ 或 1 时要比 $p=2$（长度）和 $p=1$ 时更困难，我们将把 $\|\cdots\|_p$ 是范数的证明推迟一些。最大值范数 $\|\cdots\|_\infty$ 的记号由下面结果所阐明：

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \max_k |x_k|.$$

我们把它留作习题。

例 3 n 维**复 Euclid 空间**是复线性空间 C^n，在上面定义了范数：

$$\|x\| = (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{1/2}.$$

函数 $\|\cdots\|_p$ 象上面一样定义，这样就得到了 C^n 上的另一些范数。

例 4 在讨论一致收敛性时曾提到函数的**上确界范数**，那里，通常是用来处理连续函数的。然而，在下面我们还要讨论上确界范数。设 S 是任一非空集，$B(S)$ 是 S 上一切有界复值函数的线性空间。对 $B(S)$ 中的 f 定义

(6.3) $$\|f\|_\infty = \sup\{|f(s)|; s \in S\}.$$

虽然验证具有上确界范数的 $B(S)$ 是赋范线性空间这件事是简单的，但却是重要的。

(i) 范数 $\|f\|_\infty$ 定义为 $|f|$ 的象的上确界（最小上界），即 $\|f\|_\infty$ 定义作非负数集

$$A_f = \{|f(s)|; s \in S\}$$

的上确界。由于 f 是有界函数，集 A_f 是有界的，因而有 $\|f\|_\infty < \infty$。由于 S 非空，所以 A_f 非空，因此 $\|f\|_\infty \geqslant 0$。

(ii) 设 f 和 g 是 S 上的有界函数，证明

$$\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

有各种方法，或许最简单的方法是这样的。若 $s\in S$，则

$$\begin{aligned}|(f+g)(s)| &= |f(s)+g(s)|\\ &\leqslant |f(s)|+|g(s)|\\ &\leqslant \|f\|_\infty+\|g\|_\infty.\end{aligned}$$

于是，$\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$ 是 $|f+g|$ 的象的一个上界，取上确界后 $\|f+g\|_\infty$ 仍不超过 $\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$.

(iii) $\|cf\|_\infty=|c|\|f\|_\infty$ 的验证留作习题。

所以 $\|f\|_\infty$ 是 $B(S)$ 上的半范数，它为什么是范数呢？设 $\|f\|_\infty=0$，则对一切点 s，$|f(s)|\leqslant 0$，即对任一 s，$f(s)=0$。

设 K 是 R^n 中紧集，则 K 上复值连续函数空间 $C(K)$ 是 $B(K)$ 的一个子空间(记住，在紧集上的连续函数必有界)。于是 $C(K)$ 和它的上确界范数成为一个赋范线性空间。

例 5 设 I 是实直线上的闭区间。$BV(I)$ 是 I 上的有界变差的复值(实值)函数空间。在 $BV(I)$ 上有一个很自然的半范数即全变差 (4.6 节)

$$\|f\|=V(f). \tag{6.4}$$

根据函数全变差的定义，很容易验证它满足半范数的性质。在这种情形，某些非零向量的范数是零。$\|f\|=0$ 当且仅当 f 是常数函数。

例 6 设 I 是实直线上的闭区间，令 $C^1(I)$ 是 I 上的 C^1 类函数空间。在 $C^1(I)$ 上按下面的方法定义的范数往往是有用的：

$$\begin{aligned}\|f\| &= \|f\|_\infty+\|f'\|_\infty\\ &=\sup|f|+\sup|f'|.\end{aligned} \tag{6.5}$$

最好这样来验证：(1) 上确界范数是 $C^1(I)$ 上的一个范数，(2) $f\to\|f'\|_\infty$ 是 $C^1(I)$ 上的半范数，(3) 一个范数与一个半范数的和是范数。在 $C^k(I)$ 上 ($k=2, 3, \cdots$) 有类似的范数。

例 7 考虑从 R^n 到 R^k 的线性变换空间 $L(R^n, R^k)$。在第 3 章例 21 中，讨论过 $L(R^n, R^k)$ 上的范数：

(6.6) $$\|T\| = \sup\{|T(x)|; |x| = 1\}.$$

注意，$\|T\|$ 是函数 $|T|$ 限于单位球上的上确界范数。这样，验证 (6.6) 定义一个半范数就容易了。它是范数这件事可根据下面的理由：一个线性变换如在单位球上是 0，则该线性变换是 0。

例 8 设 I 是 R^1 中闭区间，$PC(I)$ 是 I 上分段连续函数空间，则 $PC(I)$ 是 I 上有界函数空间的线性子空间。因此，上确界范数是 $PC(I)$ 上的一个范数。在 $PC(I)$ 上有另一个半范数，它和积分有重要联系：

$$\|f\|_1 = \int_I |f|.$$

要验证它是一个半范数是很直接的，它只不过利用积分是线性的这一事实。但是由 $\|f\|_1 = 0$ 得不出 $f = 0$，其实容易看到 $\|f\|_1 = 0$ 当且仅当除了有限个点外 $f(x) = 0$。

要注意，在空间 $C(I)$ 上，积分半范数 $\|f\|_1$ 确实是范数，因为对于 I 上的连续函数，如果

$$\int_I |f| = 0,$$

则函数在 I 上必须是 0。

在 $PC(I)$ 上还有一类半范数，它类似于 R^n 上的范数：

(6.7) $$\|f\|_p = \left(\int |f|^p\right)^{1/p}. \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

例 9 设 p 是数，$1 \leqslant p < \infty$。令 l^p 是复(实)数序列 $x = (x_1, x_2, \cdots)$ 的空间，且对每一个数列有

$$\sum_n |x_n|^p < \infty.$$

我们在 l^p 上定义范数

(6.8) $$\|x\|_p = \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

有界序列空间用 l^∞ 来记，它的范数是

(6.9) $$\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|; n\in Z_+\}.$$

我们介绍空间 l^p 的主要目的是要显示例 2 和例 8 之间的类似性(我们希望读者已经觉察了)。在本例中(象在例 8 一样),主要集中在值 $p=1、2、\infty$,而三角不等式的证明是容易的。注意,在三角不等式得到证明以前,l^p 是序列空间的子空间这件事并不是明显的。

例 10 设K是 R^n 中紧集。f是K上复值函数,若存在常数 $c>0$,使

$$|f(x)-f(y)|\leqslant c|x-y|, \quad x, y\in K,$$

则称 f 满足 **Lipschitz 条件**。最小的数 c 叫做 f 的 **Lipschitz 范数**。

$$\|f\| = \sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}.$$

K 上满足 Lipschitz 条件的函数空间是 $C(K)$ 的子空间,并且 Lipschitz 范数是这个子空间上的半范数。$\|f\|=0$ 当且仅当 f 是常数。

例 11 本例简短地讨论一类重要而特别的赋范线性空间。设 L 是实(复)线性空间,L 上的内积是 $L\times L$ 上的实(复)函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle$,使得

(i) $\langle x, x\rangle\geqslant 0$;若 $\langle x, x\rangle=0$,则$x=0$;

(ii) $\langle y, x\rangle=\langle x, y\rangle^*$;

(iii) $\langle cx+y, z\rangle=c\langle x, z\rangle+\langle y, z\rangle$.

线性空间L加上L上的一个内积就成为**内积空间**。在任一个内积空间中,成立 **Cauchy-Schwarz 不等式**

$$|\langle x, y\rangle|^2\leqslant\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

当 $\langle y, y\rangle=0$ 时,上式显然成立。当 $\langle y, y\rangle\neq 0$ 时,由于不等式 $0\leqslant\langle x+cy, x+cy\rangle$,在式中取 c 是常数

$$c = -\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$$

就可得证。从 Cauchy–Schwarz 不等式，取

(6.10) $$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}},$$

它满足三角不等式：

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

因而 $\|\ \|$ 是 L 上的一个范数。内积空间上的范数是很特别的，因为它还满足**平行四边形定律**：

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2].$$

一个赋范线性空间，如果它的范数满足平行四边形定律，则这个范数一定来自一个内积，也就是在这个空间中有一个也只有一个内积，使内积和范数间有关系(6.10)。在实的情形，内积可以由范数得到：

(6.11) $$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2].$$

在复的情形，内积是

(6.12) $$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{4} i^n\|x + i^n y\|^2.$$

在例题中，我们已经讨论了几个内积空间。当然，n 维 Euclid 空间是内积空间。在长方体 B 上的连续函数空间，以

$$\|f\|_2 = \left(\int_B |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

为范数时，是一个内积空间，它的内积是

(6.13) $$\langle f, g\rangle = \int_B f g^*.$$

空间 l^2（例 9）是内积空间：

(6.14) $$\langle x, y\rangle = \sum_n x_n y_n^*.$$

l^2 和积分的例子都是无限维的，它们和 Euclid 空间是类似的。

习　题

1. 设 k 是一个正整数，$x = (x_1, x_2, \cdots)$ 是 R^k 中向量的序列。再设 S 是所有这种 x 所组成的空间。下面是由某些 x 所成的集，其中哪一些是 S 的子空间？

(a) 一切 x，而 x 是有界的；

(b) 使得 $\{x_n\}$ 收敛的一切 x；

(c) 使得 $\sum_n x_n$ 绝对收敛的一切 x；

(d) 使 $|x_n|$ 收敛于 1 的一切 x。

2. 不连续函数集是 $[0, 1]$ 上实值函数空间的子空间吗？凸函数集又如何？

3. 半范数满足 $\|x-y\| \geqslant \|x\| - \|y\|$.

4. 在线性空间上，半范数与范数的和是范数。

5. 若 $\|\cdots\|$ 是 L 上半范数，则 $M = \{x; \|x\| = 0\}$ 是 L 的子空间。

6. 设 $\|\cdots\|$ 是实线性空间 L 上的范数，并且满足平行四边形定律

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2],$$

则

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2]$$

是 L 上的内积。

7. 考察 Cauchy-Schwarz 不等式的证明，指出等号成立的条件是两个向量线性相关（一个是另一个的数量倍数），此外，不等式是严格的。

8. 在赋范线性空间 $(L, \|\cdots\|)$，由 $d(x, y) = \|x-y\|$ 定义**距离**：

(a) 证明在内积空间中，两点之间的最短距离是一条直线段。

(b) 给出一个赋范线性空间的例子，使上述关于直线的性质不成立。

9. 在实直线的闭区间上，证明每一个连续可微函数满足 Lipschitz 条件。证明对这样的函数，Lipschitz 范数是它的导数的上确界范数。

10. 根据例 2 中的范数，证明

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty}\|x\|_p.$$

11. 设 f 是$[0, 1]$上连续函数，则

$$\lim_{p\to\infty}\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup|f|.$$

12. 设 $C^n(I)$是闭区间 I 上的 C^n 类函数空间。证明

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\|f^{(k)}\|_\infty$$

是 $C^n(I)$ 上的范数，并且满足$\|fg\| \leqslant \|f\|\|g\|$.

6.2 R^n上的范数

对 R^n 上的一切可能的范数，我们将给以几何上的描述。这样做，函数$\|\cdots\|_p$，$1 \leqslant p < \infty$是 R^n 上的范数这件事就更容易理解。有下面的基本事实。

定理 1 设$\|\cdots\|$是 R^n 上的范数，则存在正的常数 k，K使得

(6.15) $$k|x| \leqslant \|x\| \leqslant K|x|, \quad x \in R^n.$$

证明 设 $e_1, \cdots, e_n$ 是 R^n 中标准基向量：

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \cdots, x_n) \\ &= x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, \end{aligned}$$

则三角不等式告诉我们

$$\|x\| \leqslant |x_1|\|e_1\| + \cdots + |x_n|\|e_n\|.$$

令

$$M = \max_j \|e_j\|.$$

我们有

$$\|x\| \leqslant M\sum_j |x_j|.$$

每一个$|x_j|$被 x 的长所控制，所以

$$\sum_j |x_j| \leqslant n|x|.$$

因此，若 $K = nM$，

(6.16) $$\|x\| \leqslant K|x|, \quad x \in R^n.$$

于是，定理的一半证好了。

现在要证明存在 $k>0$，使得

$$k|x|\leqslant\|x\|,\quad x\in R^n.$$

由于 $|cx|=|c||x|$，$\|cx\|=|c|\|x\|$，我们只需要找出 $k>0$，使

$$k|x|\leqslant\|x\|,\quad |x|=1.$$

换言之，我们希望证明

$$0<\inf\{\|x\|;\ |x|=1\}. \tag{6.17}$$

现在，根据(6.16)，$\|\cdots\|$ 是 R^n 上(一致地)连续函数：

$$\begin{aligned}|\|x\|-\|y\||&\leqslant\|x-y\|\\&\leqslant K|x-y|.\end{aligned}$$

而单位球面 $\{x;\ |x|=1\}$ 是紧的。因此，$\|x\|$ 在单位球面上的下确界必在球面的某一点上达到，即存在 y，$|y|=1$，使得

$$\|y\|=\inf\{\|x\|;\ |x|=1\}.$$

由于 $y\neq0$，故 $\|y\|\neq0$。于是(6.17)成立，证毕。

因为 $\|cx\|=|c|\|x\|$，在 R^n 上的每一个范数由它的单位球所决定：

$$B=\{x;\ \|x\|<1\}.$$

怎样看待一个单位球呢？第一，B 是开集，因为 $\|\cdots\|$ 是 R^n 上连续函数。第二，B 关于原点对称：若 $x\in B$，则 $(-x)\in B$。第三，B 是凸的：若 x，y 在 B 中，则 x 和 y 之间的线段也在 B 中。第四，B 是有界的：若 $x\in B$，则 $|x|<1/k$(6.15)。

定理 2 设 B 是 R^n 中的有界子集，并且是开的，凸的和关于原点对称的。定义

$$\|x\|=\inf\left\{t;\ t>0 \text{ 和 } \frac{1}{t}x\in B\right\}, \tag{6.18}$$

则 $\|\cdots\|$ 是 R^n 上的范数。对于这一范数，B 是单位球，即 $B=\{x;\ \|x\|<1\}$。

证明 设 x 是 R^n 中任一向量。考虑数集

$$M_x=\left\{t;\ t>0\ 和\ \frac{1}{t}x\in B\right\}.$$

这个集与定义 x 的范数有关。M_x 是一类十分简单的集，这是因为它具有一条射线那样的性质：若 $t\in M_x$，$s>t$，则 $s\in M_x$。对于 $y=1/t$，$c=t/s$ 有

$$\frac{1}{s}x=cy,$$

由于 B 是包含原点的凸集，可由 $y\in B$，$0<c<1$ 得到 $cy\in B$。

证明 M_x 非空是很重要的。由于

$$\lim_{c\to 0}cx=0,$$

而 B 是 0 的邻域，对一切充分小的数量 c，有 $cx\in B$。因此对一切充分大的正数 t，$t\in M_x$。所以 M_x 是正实直线的非空开子集。

现在考虑范数

$$\|x\|=\inf M_x.$$

由于 M_x 非空，所以

$$0\leqslant\|x\|<\infty.$$

此外，根据前两段证明，M_x 是开射线

$$M_x=\{t;t>\|x\|\}.$$

令 c 是一个正的数量。设 $t>0$，则

$$\frac{1}{t}x=\frac{1}{ct}(cx).$$

因此，$t\in M_x$ 当且仅当 $(ct)\in M_{cx}$。从而 $M_{cx}=cM_x$，并且

$$\|cx\|=c\|x\|,\qquad c>0.$$

由于 B 关于原点对称，$M_x=M_{(-x)}$，同时

$$\|-x\|=\|x\|.$$

由此得出对一切数量 c

$$\|cx\|=|c|\,\|x\|.$$

现在验证三角不等式。给定向量 x, y 和正数 s, t, 有

$$\frac{1}{s+t}(x+y)=\frac{s}{s+t}\left(\frac{1}{s}x\right)+\frac{t}{s+t}\left(\frac{1}{t}y\right). \tag{6.19}$$

由于

$$\frac{s}{s+t}+\frac{t}{s+t}=1,$$

从(6.19)可看出，向量 $(s+t)^{-1}(x+y)$ 在连接 $s^{-1}x$ 和 $(1/t)y$ 的线段上。因为 B 是凸集，若 $s\in M_x$, $t\in M_y$, 则 $(s+t)\in M_{x+y}$. 因此

$$\inf M_{x+y}\leqslant\inf M_x+\inf M_y,$$

即

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|.$$

我们已经验证了 $\|\cdots\|$ 是半范数。下面利用 B 是有界的这个事实来证明它是一个范数。设 x 是任一非零向量，由于 B 是有界的，存在正数量 c, 使 $cx\notin B$. 故 $1/c$ 是集 M_x 的一个下界，所以 $\|x\|\neq0$.

在这一范数的意义下，除了 B 是单位球这件事，其余我们都已证好了。而验证 B 是单位球这一事实我们把它留作习题。

系　设 p 是数，$1\leqslant p<\infty$, 则

$$\|x\|_p=\left(\sum_k|x_k|^p\right)^{1/p}$$

是 R^n 上的范数。

证明　令

$$B_p=\{x\in R^n; |x_1|^p+\cdots+|x_n|^p<1\}.$$

由于 $f(x)=x^p$ 是正实直线上的连续函数，所以 B_p 是 R^n 的一个开子集。又由于

$$\lim_{x\to\infty}x^p=\infty,$$

故 B_p 是有界的。显然 B_p 是关于原点对称的。

为了证明 B_p 是凸集，我们验证

$$f(x)=x^p, \quad x\geqslant 0$$

是凸函数.(由于 $p\geqslant 0$) 这是 $f(x)$ 的导数是增加函数这个性质的一个直接结果(见例 3 和 4.1 节习题 11).

最后还必须利用定理 2 检验在 R^n 上与 B_p 相联系的范数是 $\|\cdots\|_p$. 若 $x\in R^n$ 和 $t>0$, 则 $(1/t)x\in B_p$ 就意味着

$$\sum_k\left|\frac{x_k}{t}\right|^p<1,$$

或

$$\frac{1}{t^p}\ \Sigma|x_k|^p<1.$$

因此,

$$\begin{aligned}\inf\left\{t>0;\ \frac{1}{t}\in B_p\right\}&=\inf\left\{t;\ t^p>\sum_k|x_k|^p\right\}\\&=\inf\ \{s^{1/p};\ s>\sum_k|x|^p\}\\&=(\sum_k|x_k|^p)^{1/p}.\end{aligned}$$

记住单位球 B_p, $1\leqslant p<\infty$ 的形状有时是有用处的. 请看图 24, 图中也包括 B_∞ 的情形, 它是关于上确界范数的单位球.

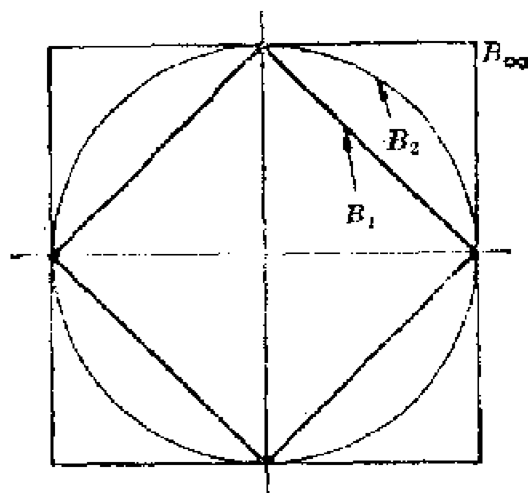


图 24

习　题

1. R^2 上范数的单位球可以是三角形，五边形，六边形吗？

2. 每一个以原点为中心的椭圆定义了 R^2 上的一个范数。设椭圆以坐标轴为轴。从椭圆的方程可以导出 R^2 上范数的一个代数公式，该范数以椭圆(的内部)为单位球。

3. 设 $0<p<1$，证明集

$$B_p=\{x\in R^n;\sum_k|x_k|^p<1\}$$

不是凸集。

4. 利用本节的系证明例 9 中的序列空间 l^p 是赋范线性空间。

5. 利用本节的系证明对每一个 p，$1\leqslant p<\infty$

$$\|f\|_p=\left(\int|f|^p\right)^{1/p}$$

是 $PC(B)$ 上的半范数。参见例 8.

6. 设 $p>1$。证明函数 $f(x)=x^p$，$x>0$ 是**严格凸**的，即若 $x<y$ 且 $0<t<1$，则

$$f(tx+[1-t]y)<tf(x)+(1-t)f(y).$$

利用这一点推断 R^n 上对范数 $\|\ \|_p$ 的闭单位球(在你所定义的意义下) 是"严格凸集"。

7. R^2 上的范数满足平行四边形定律(来自内积) 当且仅当它的单位球是一个椭圆(的内部)。这命题正确吗？

8. 对某个范数而言，闭单位球的"严格凸性"和当两个向量线性无关时三角不等式是严格的这两件事之间有联系吗？

6.3　收敛性和连续性

在第 2 章和第 3 章中，我们讨论了 R^n 中序列的收敛性和与之有关的开集、闭集、紧集，连续函数等概念。所有这些概念都可以推广，在推广后许多结果仍有效。现在我们在赋范线性空间中来讨论这些事。许多结果成立的理由也和 R^n 中一样，我们将复习这些结果。当然，也应指出那些利用了 R^n 特殊性质的结果。

设 L 是赋范线性空间。若 $x\in L$，关于 x（即以 x 为中心）的半径为 ε 的**开球**是

$$B(x;\varepsilon)=\{y\in L;\ \|y-x\|<\varepsilon\}.$$

x 的邻域是 L 中的一个子集，它包含关于 x 的某一开球。设 $\{x_n\}$ 是序列，如果除了有限个 n 的值外，x 的任一邻域包含 x_n，就称 $\{x_n\}$ **收敛于** x。若 $\{x_n\}$ 收敛于 x，记作

$$x=\lim_n x_n.$$

我们有一些基本结果：

(i) $x=\lim\limits_n x_n$ 当且仅当 $0=\lim\|x-x_n\|$；

(ii) 若 $x=\lim\limits_n x_n$ 和 $y=\lim\limits_n y_n$ 则 $x+y=\lim\limits_n(x_n+y_n)$ 并且 $cx=\lim\limits_n cx_n$.

设集 U 是 U 中任一点的邻域，集 U 就叫做**开集**。如果对 x 的任一邻域都包含 K 的无限多个点，点 x 叫做集 K 的**聚点**。如果集 K 包含它的一切聚点，集 K 就叫做**闭集**。集 U 是开集当且仅当 $L-$ U 是闭集。一族开集在任意并和有限交运算下是封闭的。而对闭集则在任意交和有限并运算下是封闭的。集的**闭包**是包含该集的一切闭集的交。集的**内部**是包含在此集内的一切开集的并集。如果 S 是 T 的子集，并且 S 的闭包包含 T 就称集 S 在集 T 中**稠密**。如果集 K 的任一开覆盖存在有限子覆盖，就称 K 为**紧集**。

相应地可定义 S 的相对邻域，相对开集，相对闭集。对 S 来说，如果它只有 S 和空集是相对于 S 的又开又闭的子集，S 叫做**连通集**。

设 L 和 M 是赋范线性空间，并设

$$D\xrightarrow{F}M,\quad D\subset L.$$

若 $x\in D$，对 $F(x)$ 的任一邻域，如果逆象 $F^{-1}(V)$ 是 x 相对于 D

的邻域，就称F在x连续。如果F在D的每一点连续，就称F是**连续**的。下列几件事等价：

(i) F是连续的。

(ii) 若$x\in D$，对$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得

$$\|F(t)-F(x)\|<\varepsilon,\quad t\in D,\quad \|t-x\|<\delta.$$

(iii) 若V是M中的任一开集，则$F^{-1}(V)$是相对于D的开集。

(iv) 设$\{x_n\}$是D中收敛于点$x\in D$的点列，则$F(x_n)$收敛于$F(x)$。

连续函数的和、复合是连续的。

在连续映射下，紧(连通)集的象是紧(连通)的。

对函数F

$$D\xrightarrow{F}M,\quad D\subset L,$$

若对每一$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得

$$\|F(x_1)-F(x_2)\|<\varepsilon,\quad \|x_1-x_2\|<\delta,$$

则称F是**一致连续**的。在紧集上的连续函数是一致连续的。

在上面的简短小结中，显然第2章和第3章的某些结果缺席了，这些缺席者依赖于R^n的性质，而一般的赋范线性空间无此性质。现在我们要讨论R^n的特殊性质。

首先，请注意(第2章和第3章的大部分)在R^n上也可以使用范数。由定理1得到，R^n上的一切范数定义了同样的收敛序列，因此，定义了同样的闭集，同样的开集，同样的连续函数等等。我们要问，赋范线性空间与带有某一范数的R^n所组成的空间之间有什么区别呢？

设L是线性空间，在L中有n个向量$e_1, \cdots, e_n$，由这n个向量可张成空间L，即对任一$x\in L$，都可以表达成这些向量的线性组合：

(6.20) $$x = c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n,$$

这时，就称线性空间 L 是**有限维**的。若 L 是有限维的，我们能选择无关向量组 $e_1, \cdots, e_n$，使它们张成 L (数 n 是 L 的**维数**)。通过 (6.20) 我们就得到向量 $x \in L$ 与(一切)向量 $(c_1, \cdots, c_n) \in R^n$ 之间的一个一一对应

$$x \longleftrightarrow (c_1, \cdots, c_n).$$

L 上的范数对应于 R^n 上某一范数，于是 L 的性状就如同带有某一范数的 R^n 一样。

所以，当我们回顾第 2 章和第 3 章时可以看到，有些只涉及到有限维赋范线性空间的结果现在仍成立。有两个这样类型的基本结果。

1. 在有限维赋范线性空间中，每一个 Cauchy 序列收敛。

2. 在有限维赋范线性空间中，每一个有界序列有收敛子序列(因此，任一有界闭集是紧集)。

Bolzano-Weierstrass 性质(2)是有限维空间中更为专门的性质，它是有限维空间的特征，可以证明 (见 6.5 节)，赋范线性空间 L 是有限维的当且仅当 L 中的每一个有界序列有收敛的子序列。

另一方面，完备性(1)是许多无限维空间也具有的性质。完备性比序列的紧性要弱，然而由完备性导出的结论是十分重要的，对于具有这种性质的空间我们还要介绍专门名词。

定义 赋范线性空间 L 中，如果每一个 Cauchy 序列收敛，就称它是**完备的**。完备的赋范线性空间也叫做 **Banach 空间**。

对于 Banach 空间的特有性质，我们将在以后进一步讨论。现在我们叙述曾在第 2 和第 3 章中讲过的两个结果，它们是利用 R^n 的完备性得到的。

(i) 设 L 是 Banach 空间，$\sum x_n$ 是无穷级数，并且这级数绝

对收敛：

$$\sum_n \|x_n\| < \infty,$$

则级数收敛。

(ii) 设L是赋范线性空间，M是 Banach 空间，令

$$D \xrightarrow{F} M, \quad D \subset L,$$

是一致连续函数，则F可以扩张成为D的闭包上的连续函数：

$$\bar{D} \xrightarrow{\bar{F}} M.$$

例 12 在讨论R^n以后，我们遇到过的第一个赋范线性空间或许是在R^n中紧集上的连续函数空间。现在，我们从赋范线性空间L的紧集K出发。设$C(K)$是K上实（或复）连续函数空间。在许多分析问题中，$C(K)$上的"自然"范数是上确界范数

$$\|f\|_\infty = \sup_K |f|,$$

这是由于上确界范数显示出函数值一致地互相接近：范数$\|f-g\|_\infty$是小的当且仅当$|f(x)-g(x)|$关于x是一致地小。如我们早先所看到的，在上确界范数中，收敛性

$$\|f-f_n\|_\infty \longrightarrow 0$$

正好是$\{f_n\}$一致收敛于f。

$C(K)$和它上面的上确界范数所组成的赋范线性空间是 Banach 空间。下面一些论证是我们熟悉的。设$\{f_n\}$是 Cauchy 序列：

$$\lim_{m,n} \|f_m - f_n\|_\infty = 0.$$

于是，对每一$x \in K$，数列$\{f_n(x)\}$是 Cauchy 序列，这是因为

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \|f_m - f_n\|_\infty.$$

根据实（或复）数空间的完备性，这些数序列中的每一个都收敛。设f是K上的函数，它定义为

$$f(x)=\lim_n f_n(x).$$

容易看到$\{f_n\}$一致收敛于f：若

$$\|f_m-f_n\|_\infty<\varepsilon, \qquad m, n\geqslant N,$$

则(对m取极限)

$$\|f-f_n\|_\infty\leqslant\varepsilon, \qquad n\geqslant N.$$

由于f_n一致收敛于f，因而f是连续的。这就证好了在赋范线性空间$L=(C(K), \|\cdots\|_\infty)$中，$\{f_n\}$收敛。

例 13 设$K=[a, b]$是实直线上的闭区间。对于例 12 中取$K=[a, b]$的情况，我们作两个注释。第一，多项式函数

$$p(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$$

组成$C[a, b]$的线性子空间，并且这一子空间在Banach空间$(C, \|\cdots\|_\infty)$中稠密。这只不过再次肯定了Weierstrass逼近定理：在$[a, b]$上的每一个连续函数可以用多项式一致逼近。

第二，容易说明对Banach空间，Bolzano-Weierstrass性质不成立。令

$$g(x)=\frac{x-a}{b-a}, \qquad a\leqslant x\leqslant b, \tag{6.21}$$

则幂的序列$\{g^n\}$是有界的：

$$\|g^n\|_\infty=1, \qquad n=1, 2, 3, \cdots$$

但是，由于

$$\lim g^n(x)=\begin{cases}1, & x=b,\\ 0, & a\leqslant x<b,\end{cases} \tag{6.22}$$

故$\{g^n\}$没有一致收敛的子序列。由点态收敛性，假如有一个子序列能够一致收敛，那末收敛的极限函数必定是由方程(6.22)右边所定义的函数。由于这个函数是不连续的，因此，这样的一致收敛性是不可能的。

例 14 设$C^1(I)$是闭区间上C^1类函数空间，它的范数是

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,$$

这是一个 Banach 空间。理由如下。假如 $\{f_n\}$ 是 Cauchy 序列。由于

$$\|f_n - f_k\| = \|f_n - f_k\|_\infty + \|f'_n - f'_k\|_\infty,$$

序列 $\{f_n\}$ 一致收敛，序列 $\{f'_n\}$ 也一致收敛。由第 5 章定理 5，$f = \lim\limits_n f_n$ 是可微的，并且

$$f' = \lim_n f'_n.$$

由于 f'_n 是连续的并且一致收敛于 f'，f' 是连续的。于是 $f \in C^1(I)$，并且 $\|f - f_n\| \to 0$。

现在，采用上确界范数的 $C^1(I)$ 也是赋范线性空间，但它不是完备的；其实它在 $C(I)$ 中稠密。

例 15 考虑例 9 的序列空间 l^p。这些空间是 Banach 空间。我们就 $p=1$ 的情形给以验证。空间 l^1 由复数的序列

$$x = (x_1, x_2, \cdots)$$

所组成，并且

$$\|x\|_1 = \sum_n |x_n| < \infty.$$

假如在 l^1 中有一个 Cauchy 序列 $\{x_n\}$：

$$\lim \|x_m - x_n\|_1 = 0.$$

若 $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \cdots)$，则对每一个 k，第 k 个坐标序列 $\{x_{nk}\}$ 是由复数组成的 Cauchy 序列：

$$|x_{mk} \leqslant x_{nk}| \leqslant \|x_m - x_n\|_1.$$

由复数的完备性，对每个 k 存在 $x_k \in C$，使得

$$\lim_n x_{nk} = x_k.$$

我们要证明序列 $x = (x_1, x_2, \cdots)$ 是 l^1 中的，并且

$$\|x - x_n\|_1 \longrightarrow 0.$$

考虑二重序列

$$s_{nk}=\sum_{j=1}^{k}|x_{nj}|,$$

对每一个 n，序列 $\{s_{nk}\}$ 关于 k 的极限存在：

$$\lim_k s_{nk}=\|x_n\|_1.$$

对每一个 k，序列 $\{s_{nk}\}$ 关于 n 的极限存在：

$$\lim_n s_{nk}=\sum_{j=1}^{k}|x_j|. \tag{6.23}$$

此外，在(6.23)中的收敛性是关于 k 一致的，这是由于 $\{s_{nk}\}$ 是关于 n 的 Cauchy 序列，而且关于 k 是一致的：

$$\begin{aligned}|s_{mk}-s_{nk}|&=\left|\sum_{j=1}^{k}|x_{mj}|-\sum_{j=1}^{k}|x_{nj}|\right|\\&\leqslant\sum_{j=1}^{k}|x_{mj}-x_{nj}|\\&\leqslant\|x_m-x_n\|_1.\end{aligned}$$

根据 Moore–Osgood 二重极限定理(第5章定理3)，

$$\lim_n\sum_{j=1}^{k}|x_j|$$

存在而且等于序列 $\{\|x_n\|_1\}$ 在 n 下的极限。于是 $x\in l^1$，并且

$$\|x\|_1=\lim_n\|x_m\|_1.$$

为了验证 $\{x_n\}$ 在 l^1 范数下收敛于 x，对序列

$$t_{nk}=\sum_{j=1}^{k}|x_j-x_{nj}|,$$

可同样论证。对每一个 n，这一序列对 k 的极限是 $\|x-x_n\|_1$。另一方面，

$$\lim_n t_{nk}=0,$$

而且对 k 是一致的。从而有

$$\lim_n\|x-x_m\|_1=\lim_k 0=0.$$

序列空间 l^2 是 Hilbert 空间。任一完备的内积空间就叫做

Hilbert 空间。

例 16 一个重要的赋范线性空间是 R^n 中闭长方体上的连续函数空间 $C(B)$，取范数

$$\|f\|_1=\int_B|f|.$$

在这样的空间中，两个函数 f 和 g，当积分

$$\int_B|f-g|$$

充分小时，f 和 g 就互相接近。这和上确界范数所提供的逼近程度是大不相同的。由于

$$\int_B|f-g|\leqslant\|f-g\|_\infty m(B),$$

因此由一致收敛性可推出在范数 $\|\cdots\|_1$ 中的收敛性。当 $\{f_n\}$ 不是点态收敛时，当然更谈不上一致了，然而这时可以有

$$\|f-f_n\|_1\longrightarrow 0.$$

确实，有这样的情况：

(6.24) $$\|f_n\|_1\longrightarrow 0 \text{ 和 } \|f_n\|_\infty\longrightarrow\infty.$$

例如，对于 $B=[0,1]$ 的情形，函数 $f_n(x)=\sqrt{n}\sin nx$ 或图 25 中帐蓬状函数就是如此。

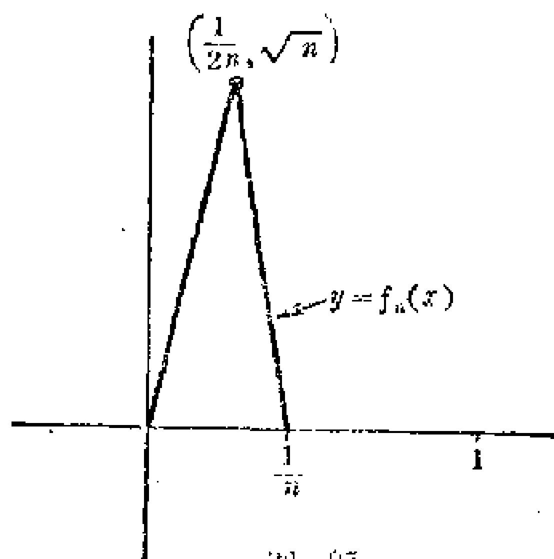


图 25

空间 $C(B)$ 关于范数 $\|\cdots\|_1$ 不是完备的。对 $B=[0, 1]$ 的情形，这作为一个习题。

我们在结束本节时作一个注释。在本节开始关于收敛性、连续性等等的一些论述都可以搬到度量空间。设 S 是一个集，在 $S\times S$ 上定义一实值函数 d 满足

(i) $d(x, y)\geqslant 0$, $d(x, y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(ii) $d(x, y)=d(y, x)$;

(iii) $d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$.

函数 d 称为 S 上的**度量**或距离函数，集 S 连同 d 成为**度量空间**。任一赋范线性空间 $(L, \|\cdots\|)$ 上有一个自然的度量：$d(x, y)=\|x-y\|$。和赋范线性空间一样，在度量空间上同样可定义 ε-球、开集、收敛性等等。有兴趣的读者检查一下就可明白第 2 章和第 3 章的基本结论在这里仍有效。我们宁可使用度量空间而不是利用赋范线性空间的子集？这是由于要避免相对开集，相对闭集等等。

习　题

1. 设 K 是紧集，$C(K)$ 是 K 上实值连续函数空间。在 $C(K)$ 上配备上确界范数。证明正连续函数集是 $C(K)$ 的开子集。

2. 在(实) $C(B)$ 上配备范数

$$\|f\|_1=\int_B|f|$$

(B 是一个长方体)。正连续函数集是开集吗？

3. 在 $C([0, 1])$ 上配备上确界范数。固定正整数 n，令 P_n 是次数不超过 n 的多项式函数

$$p(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$$

所组成的子空间。证明 P_n 是 $C([0, 1])$ 的闭子空间。

4. 设 X 是 Banach 空间，在 X 中每一个绝对收敛级数收敛。

5. 在赋范线性空间中，每一个凸集是连通的。

6. 若赋范线性空间具有 Bolzano-Weierstrass 性质，它必定是完备的。

7. 在 $C([0, 1])$ 上配备范数

$$\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|dx,$$

设 L 是 $C([0, 1])$ 上函数

$$L(f)=f(0),$$

则 L 连续吗?

8. 设 S 是从 $C([0, 1])$ 到 $C([0, 1])$ 中的函数,它由二次幂 $S(f)=f^2$ 所定义。在 $C([0, 1])$ 上配备上确界范数, S 连续吗? 如果我们对用积分范数 $\|\cdots\|_1$ 又怎样呢?

9. 如果忽略积分常数,反微分可以定义一个映射(函数)

$$C([a, b])\xrightarrow{I}C([a, b])$$

$$(If)(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

I 相对于上确界范数是连续映射吗?对范数 $\|\cdots\|_1$ 又怎样?

10. 设有 C^1 类函数到连续函数的微分映射,请考虑一下,对 $C^1([a, b])$ 和 $C([a, b])$ 上各种范数,微分映射连续吗?

11. 设 f 是 $[0, 1]$ 上分段连续而不是连续的函数,而且改变函数在有限个点的数值也不能使之连续。例如在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上, $f(x)=0$, 而在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上, $f(x)=1$。

(a) 证明存在连续函数 f_n, 使 $\|f-f_n\|_1$ 趋于0。($\|\cdots\|_1$ 是积分范数。)

(b) 证明在赋范线性空间 $(C, \|\cdots\|_1)$ 中,不存在象(a)中那样的收敛序列。提示:若 f_n 在范数 $\|\cdots\|_1$ 下收敛于连续函数 g, 对 $\|f-g\|_1$ 你能推断出什么?

12. 在 $[0, 1]$ 上定义函数 f_n:

$$f_n(x)=\begin{cases}n, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{n},\\ \frac{1}{x}, & \frac{1}{n}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

证明 $\{f_n\}$ 是 $(C, \|\cdots\|_1)$ 的 Cauchy 序列,然而它在这一空间中并不收敛。

13. 设 $C^1([a, b])$ 配备范数

$$\|f\|=\sup|f|+\sup|f'|,$$

多项式函数的子空间在 $C^1([a, b])$ 中稠密吗?

14. 设 X 是赋范线性空间,则 X 的任一有限维子空间是闭的。

15. 例 10 中的空间 Lip(K)完备吗?

16. l^1 在 l^∞ 中稠密吗?

17. 有界变差函数空间(例 5)是完备的半范数空间。

18. 请回忆一下再证明定理：从赋范线性空间（的子集）到 Banach 空间的一致连续函数可以扩张成它的定义域闭包上的连续函数。

19. 设L和M是赋范线性空间，令T是从L到M的线性变换：$T(cx_1+x_2)=cT(x_1)+T(x_2)$。证明$T$为连续的当且仅当存在非负常数$k$，使得对一切$x\in L$，有

$$\|T(x)\|\leqslant k\|x\|,$$

(如同关于收敛性一样，虽然在L和M中的范数可能并不相同，但却使用了同样的符号.)。

20. 在习题 19 的记号下，令 $B(L, M)$ 是从L到M的一切连续线性变换的集。证明 $B(L, M)$按自然的方式是一个线性空间，而

$$\|T\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

是这个线性空间上的范数。

6.4 完 备 性

Banach 空间有几个基本性质是一般的赋范线性空间所没有的。我们没有时间作全面的讨论，只打算介绍两个基本结果和它们的一些推论。这些结果表明证明某些事物的存在要用完备性（象紧性一样）。

我们将关心赋范线性空间L的子集的完备性，这时L本身甚至可以不完备。当然，所谓子集K是完备的，就是K中任一个 Cauchy 序列收敛于K中的一个向量。任一完备子集是闭的。若L是一个 Banach 空间，子集K是完备的当且仅当K为闭的。

定理 3 设L是赋范线性空间，则L的任一有限维子空间是完备的，因而是L的闭子集。

证明 设M是(有限)k维子空间。$e_1, \cdots, e_k$是M的基。由$T(c_1, \cdots, c_k)=c_1e_1+\cdots+c_ke_k$定义的映射

$$R^k \xrightarrow{T} M(\text{在复的情形用 } C^k)\ .$$

建立了 R^k 中的向量和 M 中向量之间的一一对应，在线性运算下这种对应仍保持。于是

$$|||(c_1,\ \cdots,\ c_k)||| = \|T(c_1,\ \cdots,\ c_k)\|$$

定义了 R^k 上的一个范数。由于 R^k 上的一切范数确定了同样的收敛序列，而 $(R^k,\ |||\cdots|||)$ 是完备的赋范线性空间，所以 M 是完备空间。

为了证明赋范线性空间的子集是完备的，不必验证每一个 Cauchy 序列收敛，常常只要对下面的特殊类型序列给予验证就可以了，这样做往往要简单些。

定义 设 L 是赋范线性空间。在 L 中的**快速 Cauchy 序**是一个序列 $\{x_n\}$，它满足

(6.25)
$$\sum_n \|x_n - x_{n+1}\| < \infty.$$

对这个术语要作些说明，我们需要证明满足(6.25)的序列是 Cauchy 序列。为了验证，先注意

$$\lim_n \sum_{k=n}^{\infty} \|x_k - x_{k+1}\| = 0.$$

于是，给定 $\varepsilon>0$，存在正整数 N_ε，使得

(6.26)
$$\sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} \|x_k - x_{k+1}\| < \varepsilon.$$

设 $n>m\geqslant N_\varepsilon$，则

$$x_m - x_n = (x_m - x_{m+1}) + (x_{m+1} - x_{m+2}) + \cdots + (x_{n-1} - x_n),$$

因此，

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \sum_{k=m}^{n-1} \|x_k - x_{k+1}\|.$$

由(6.26)

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon, \quad m,\ n \geqslant N_\varepsilon.$$

回忆一下，为了使 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列，多

$$\lim_n \|x_n - x_{n+1}\| = 0$$

是不充分的。而我们刚才证明的是，如果 $\|x_n - x_{n+1}\|$ 趋于0，而且其速度快得足以使

$$\sum_n \|x_n - x_{n+1}\| < \infty.$$

所以，序列才是 Cauchy 序列。

引理 赋范线性空间 L 的子集 K 是完备的当且仅当在 K 中每一个快速 Cauchy 序列收敛于 K 中的点。

证明 引理的一半是平凡的。假定我们知道 K 中每一个快速 Cauchy 序列在 K 中收敛。令 $\{y_n\}$ 是任一 Cauchy 序列，对每一正整数 k，存在正整数 N_k，使得

$$\|y_m - y_n\| < 2^{-k}, \qquad m,\ n \geq N_k.$$

显然，可以选择这样的整数，使 $N_1 < N_2 < N_3 < \cdots$，令

$$x_k = y_{N_k},$$

则

$$\sum_k \|x_k - x_{k+1}\| < \sum_k 2^{-k}$$
$$= 1.$$

因此 $\{x_k\}$ 收敛于向量 $x \in K$。因为 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 序列，并且子序列 $\{y_{N_k}\}$ 收敛，所以整个序列收敛于同样的极限 x。

我们的第一个基本定理给出了一类特殊映射的“不动点”的存在性。

定义 设 S 是赋范线性空间的子集，S 的**收缩**是一个函数

$$S \xrightarrow{T} S,$$

并且存在 c，$0 < c < 1$，使得

(6.27) $$\|Tx - Ty\| \leq c\|x - y\|, \qquad x,\ y \in S.$$

定理 4 设 K 是赋范线性空间 L 的完备非空子集，若 T 是 K 的收缩，则 T 有一个且仅有一个不动点，即存在一个也只有一个点

$y \in K$，使 $T(y)=y$。

证明 设 x 是 K 的任一点，反复施加收缩 T：

$$\begin{aligned}
&x, \\
&Tx, \\
&T^2x = T(Tx), \\
&\vdots \qquad \vdots \\
&T^n x = T(T^{n-1}x), \\
&\vdots \qquad \vdots
\end{aligned}$$

序列 $T^n x$ 将收敛于不动点 y。我们有

$$\begin{aligned}
\|Tx - T^2x\| &= \|Tx - T(Tx)\| \\
&\leqslant c\|x - Tx\|
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
\|T^2x - T^3x\| &\leqslant c\|Tx - T^2x\| \\
&\leqslant c^2\|x - Tx\|, \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
\|T^n x - T^{n+1}x\| &\leqslant c^n\|x - Tx\|.
\end{aligned}$$

由于 $0<c<1$，我们得到

$$\sum_{n}^{\infty}\|T^n x - T^{n+1}x\| < \infty.$$

于是 $\{T^n x\}$ 是快速 Cauchy 序列，而 K 是完备的，存在 $y \in K$ 使得

$$y = \lim_n T^n x.$$

由于 T 是一个收缩，T 是(一致地)连续的，于是

$$\begin{aligned}
Ty &= \lim_n T(T^n x) \\
&= \lim_n T^{n+1}x \\
&= y.
\end{aligned}$$

所以 y 是不动点。

为什么 y 是唯一的不动点呢？若 $Tz=z$，则

$$\|y-z\| = \|Ty - Tz\|$$

$$\leqslant c\|y-z\|.$$

由于 $0<c<1$，它必须是 $\|y-z\|=0$。

上面的结果不仅证明了不动点的存在性，而且还证明了，从 K 的任一点出发，反复施加收缩 T，将逼近不动点。这种做法在数学及其应用中是经常使用的。

例 17 设 p 是闭区间 $[a, b]$ 上的非负连续函数，我们打算用 Newton 方法去近似 $\sqrt{p}$，Newton 方法是先估计一个近似值 g，然后设法改进它。取 $h=g+\frac{1}{2}(p-g^2)$ 作为第二次近似，$k=h+\frac{1}{2}(p-h^2)$ 作为第三次近似，等等。这样，就有映射

$$C([a, b]) \xrightarrow{T} C([a, b]),$$

它由

$$Tf=f+\frac{1}{2}(p-f^2)$$

所定义。T 的不动点是 p 的连续平方根，这是由于 $Tf=f$ 当且仅当 $p-f^2=0$。为什么可以用收缩定理呢？也就是根据什么理由保证

$$\|Tf-Tg\|_\infty \leqslant c\|f-g\|_\infty,$$

$0<c<1$ 成立呢？现在

$$Tf-Tg=\frac{1}{2}(g^2-f^2)$$

$$=\frac{1}{2}(g+f)(g-f),$$

所以

$$\|Tf-Tg\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|g+f\|_\infty\|g-f\|_\infty.$$

于是，如果我们可以将 T 限制在函数 $f, g, \cdots$ 的集上，而集中函数的上确界范数是以 $c<1$ 为界的，那么就有了一个收缩。例如

设

$$\|p\|=c^2<1.$$

由于我们常常可以用一个常数去乘 p，因此，这不是一个很大的限制条件。现在令

$$K=\{f\in C([a,\ b]);0\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{p(x)}\},$$

显然，在一致收敛性下 K 是闭的，并且 K 中的一切函数都以 $c<1$ 为界。而集 K 被 T 映射到自身：

$$K\xrightarrow{T}K.$$

如果 $0\leqslant f\leqslant\sqrt{p}$，则

$$f+\frac{1}{2}(p-f^2)\geqslant f\geqslant 0,$$

并且，由于 $0\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{p}+f)<1$，所以

$$\begin{aligned}f+\frac{1}{2}(p-f^2)&=f+\frac{1}{2}(\sqrt{p}+f)(\sqrt{p}-f)\\&\leqslant f+(\sqrt{p}-f)\\&=\sqrt{p}.\end{aligned}$$

例 18 利用收缩定理，我们可以建立一阶微分方程解的存在性（和唯一性），微分方程是

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y).$$

正如过去一样，我们能够容易地处理 Banach 空间值函数，然而，现在只需处理区间上的向量（R^n）值函数。我们假设给定了实直线上的一个区间 I，和一个函数 F，它把 R^{n+1}（的部分）映射到 R^n 中。我们要寻找函数 y

$$R\xrightarrow{y}R^n,$$

使它满足微分方程

(6.28) $$y'(x)=F(x, y(x)).$$

我们必需确定积分常数，因此，指定一个初值条件

(6.29) $$y(x_0)=y_0,$$

式中 x_0 是 I 中给定点，而 y_0 是 R^n 中给定向量。让我们考虑这个方法，(6.28)是微分方程组

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= f_1(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)), \\ &\vdots \\ y_n'(x) &= f_n(x, y_1(x), \cdots, y_n(x)), \end{aligned}$$

而初始条件是

$$y_j(x_0)=y_{j0}, \qquad 1\leqslant j\leqslant n.$$

现在我们必须明确关于函数 F 的假定。为简单起见，我们将假定 $F(x, y)$ 对一切 $x\in I$ 和一切靠近 y_0 的向量 y 有定义：

$$I\times B(y_0; r)\xrightarrow{F} R^n.$$

假定 F 是连续的，并且 F 关于第二个变量(一致地)满足 Lipschitz 条件：

(6.30) $$|F(x, y_1)-F(x, y_2)|\leqslant M|y_1-y_2|,$$

式中 M 是某一常数。对于光滑函数 F，这些条件是必然满足的。

现在要考察这样一件事。若函数 y 满足(6.28)，由微积分基本定理得到

(6.31) $$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}F(t, y(t))dt.$$

右边的表达式是对函数 y 进行"演算"产生的函数。我们要寻找这一演算的不动点。右边的积分在什么地方进行演算呢？它是在从 I 到 R^n 中的某些连续函数上进行演算。所以，我们考虑 Banach 空间 $C(I; R^n)$，这是从 I 到 R^n 的连续函数空间，采用上确界范数(假定 I 是紧的)：

$$\|G\|=\sup\{|G(x)|; x\in I\}.$$

如果函数 y 所取的值使得 $(g, y(t))$ 在 F 的定义域内，那么对这样

的函数 y，(6.31) 中的积分是有意义的。所以，我们考虑和常数函数 y_0 相距一致地小于 r 的那些函数所成的集：

(6.32) $$K=\{y\in C(I;R^n);\quad \|y-y_0\|_\infty\leqslant r\},$$

(记住 y_0 是(6.29)中的函数)。于是，有了一个定义在 K 上的运算(函数)：

$$K\xrightarrow{T}C(I;R^n),$$

$$(Ty)(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}F(t,\ y(t))dt.$$

注意到

$$|(Ty)(x)-y_0|\leqslant|x-x_0|\sup|F|.$$

因此，函数 Ty 在区间中关于 x_0 一致地靠近 y_0。若 δ 是任一数，使得

$$\delta\sup|F|\leqslant r,$$

若 J 是区间

(6.33) $$J=\{x\in I;\quad |x-x_0|\leqslant\delta\},$$

并且如果取

$$K=\{y\in C(J;R^n);\|y-y_0\|_\infty\leqslant r\},$$

则

$$K\xrightarrow{T}K.$$

(这里，范数 $\|y-y_0\|_\infty$ 涉及到整个区间 J 上的上确界。)若 δ 充分小，则 T 是一个收缩：

$$\begin{aligned}|(Ty_1)(x)-(Ty_2)(x)|&\\&=\left|\int_{x_0}^{x}[F(t,\ y_1(t))-F(t,\ y_2(t))]dt\right|\\&\leqslant|x-x_0|M\|y_1-y_2\|_\infty,\end{aligned}$$

式中 M 是(6.30)的常数。显然，如果我们要求 $\delta M<1$，则 T 是 K 的收缩，根据不动点定理，在区间 J 上，存在一个也只有一个函数

y，它满足(6.28)和(6.29)。

于是在整个区间 I 上，我们的问题有唯一解。在 J 上取这个解，利用 J 的端点的值作为初始条件，在长 δ 的区间中关于每一个端点求解(6.28)，如此继续做下去，关键是 δ 不依赖于 x_0，并且由唯一性，解恰好由局部解拼合而成。

为了再从几何上说明完备性，我们将证明第二个基本定理。

引理 （赋范线性空间 L 的）子集 K 为完备的当且仅当 K 为闭的，并具有下述性质：设 $\{K_n\}$ 是 L 中子集的序列，使得

(i) 每一个 K_n 是非空闭集，

(ii) $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$，

(iii) $\lim\limits_{n} \operatorname{diam}(K_n) = 0$，

则交 $\bigcap\limits_{n} K_n$ 是非空的。

证明 设 K 是完备的，而 $\{K_n\}$ 是具有性质 (i), (ii), (iii) 的任一子集的序列。设 x_n 是 K_n 的任一点，根据 (i)，这种点是存在的，因为(ii)，集 K_n 是递减的，因而

$$x_k \in K_N, \quad k \geqslant N.$$

于是

$$\|x_m - x_n\| \leqslant \operatorname{diam}(K_N), \qquad m, n \geqslant N.$$

由 (iii) 看出，$\lim\limits_{N} \operatorname{diam}(K_N) = 0$，因此有

$$\lim_{m, n} \|x_m - x_n\| = 0,$$

这就是说 $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 序列。由于 K 是完备的，存在 $x \in L$，使

$$\lim_{n} \|x - x_n\| = 0.$$

容易看出 x 在每一个集 K_N 中，这是因为 K_N 是闭的，并且对 $n \geqslant N$，$x_n \in K_N$。（注意关于直径的条件保证了一切集 K_n 的交恰恰只含一点 x。）

相反地，设K是闭集，并且对闭子集的序列具有所叙述的性质。设$\{x_n\}$是K中的一个Cauchy序列，对每一个正整数n，存在正整数N_n，使得

$$\|x_k - x_m\| < \frac{1}{n}, \qquad k, m \geqslant N_n,$$

我们可以选择这些整数，使$N_1 \leqslant N_2 \leqslant N_3 \leqslant \cdots$。设$K_n$是闭球$\bar{B}(x_{N_n}; 1/n)$和$K$的交：

$$K_n = \left\{x \in K; \|x - x_{N_n}\| \leqslant \frac{1}{n}\right\}.$$

显然，每一个K_n是非空闭集，并且$\operatorname{diam}(K_n) \leqslant 2/n$。由于$k \geqslant N_n$时$K_n$包含每一个$x_k$，而$N_1 \leqslant N_2 \leqslant N_3 \leqslant \cdots$，就有$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$。根据假设，存在一点$x$，$x$位于每一个$K_n$中。因而

$$\|x - x_k\| \leqslant \frac{2}{n}, \qquad k \geqslant N_n,$$

并且

$$\lim_k x_k = x.$$

定理 5(Baire 类型定理) 设K是赋范线性空间X的完备子集。设$\{U_n\}$是K的子集的序列，使得

(i) 每一个U_n是相对于K的开集；

(ii) 每一个U_n在K中稠密，

则交

$$\bigcap_n U_n$$

在K中稠密。

证明 首先，一切U_n的交是非空的，证明如下。在U_1中任选一点x_1，由于U_1相对于K是开集，存在r_1，使球

$$B_1 = B(x_1; r_1)$$

与K的交包含在U_1中。缩小r_1，使$K \cap \bar{B}_1 \subset U_1$。由于$U_2$在$K$

中稠密，在U_2中存在一点，它也在$K\cap B_1$中。利用U_2是开集的事实寻找一个闭球：

$$K\cap \bar{B}_2\subset U_2,$$
$$\bar{B}_2\subset \bar{B}_1.$$

取$r_2<\frac{1}{2}r_1$。由归纳法，可得到闭球的递减序列：

$$\bar{B}_1\supset\bar{B}_2\supset\bar{B}_3\supset\cdots$$
$$\lim_n \mathrm{diam}(B_n)=0,$$
$$\bar{B}_n\cap K\subset U_n,$$
$$\bar{B}_n\cap K\neq\varnothing.$$

由于K是完备的，存在K的点使其含在每一个$\bar{B}_n$中。这个点位于一切U_n的交中。

现在要证明集U_n的交在K中稠密。从刚才的证明中看到，给定$x\in K$和$\varepsilon>0$，利用U_1在K中稠密的事实，选择第一个球B_1，使$\bar{B}_1\supset B(x;\varepsilon)$。

系 Banach空间不是它自己的可列个真闭子空间的并。

证明 设L是Banach空间。S_1, S_2, $\cdots$是L的线性子空间，并且每一个子空间是闭的，也是真的：$S_n=\bar{S}_n\neq L$。要求证明的是

$$\bigcup_n S_n\neq L.$$

我们对开集$U_n=L-S_n$应用Baire定理。U_n必定是开的，但U_n是否在L中稠密呢？若U_n不在L中稠密，则S_n的内部是非空的，即S_n包含某一个开球$B(x;\varepsilon)$。由于S_n是线性子空间，从而它包含以原点为中心、半径为ε的开球：

$$B(x;\varepsilon)=x+B(0;\varepsilon),$$

因为对任何一个向量都有一个非零数c，使得c乘此向量属于$B(0,\ \varepsilon)$，因此S_n包含L的一切向量，这样就推出U_n在L中稠

密。由 Baire 定理，一切 U_n 的交仍在 L 中稠密，这意味着并

$$\bigcup_n S_n$$

有空的内部。

有些人喜欢把 Baire 定理叙述成这样：若 K 是完备的，$\{K_n\}$ 是 K 的闭子集的序列，使得

$$K=\bigcup_n K_n,$$

则在 $\{K_n\}$ 中必有一个集具有相对于 K 的非空的内部。从我们对于系的证明中可以看到这是很本质的形式。

例 19 由 Baire 定理得到实数集是不可列集。因为任何一点的余集是 R 的稠密开子集。于是，如果从 R 中删除任何可列集，剩余下来的集在 R 中稠密。

例 20 设 L 是某一区间 $[a, b]$ 上的多项式函数的线性空间。在 L 上有各种各样有趣的范数，例如：

$$\|f\|_\infty,$$

$$\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty,$$

$$\int_a^b |f|,$$

$$\vdots$$

但是，根据系，没有一种范数，能使 L 在该范数下成为 Banach 空间，这是因为 L 是有限维子空间的增加序列的并

$$L=\bigcup_n S_n,$$

$$S_n=\{f\in L;\ (f)\text{的次数}\leqslant n\},$$

而有限维子空间是闭的(见定理 3)。

例 21 下面的方法可说明“处处”连续的函数可以是处处不可微的。考虑实直线上的闭区间 $I=[a, b]$ 和 I 上的连续(实或复)函数空间 $C(I)$。在 $C(I)$ 上配备上确界范数。若 m, n 是正整数，U_{mn} 是 $C(I)$ 中的函数 f 所成的集，要求 f 具有性质：对

每一$x\in I$，存在点$t\in I$，使得

(i) $0<|t-x|\leqslant 1/m$,

(ii) $|f(t)-f(x)|>n|t-x|$.

现在每一个U_{mn}在$C(J)$中是开集，这一点留作习题。U_{mn}也在$C(I)$中稠密。为了看清这一点，对每一个f，用分段线性函数去一致地逼近它，这个分段线性函数是由连接互相接近的点的陡削线段组成的。由 Baire 定理

$$S=\bigcap_{m,n}U_{mn}$$

在$C(I)$中稠密。S中函数可以看作什么呢？若$f\in S$，对I中任一给定的x和任何给定的正整数m, n，存在$t\in I$，具有

$$0<|t-x|\leqslant\frac{1}{m},$$

$$\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right|>n.$$

显然，这样的f在I的任一点不可微。我们至少推断出连续而处处不可微的函数集在$C(I)$中稠密。

习　　题

1. 赋范线性空间L是完备的当且仅当它的闭单位球$\bar{B}(0, 1)$是完备的。

2. 设l^∞是一切实(复)数序列$x=(x_1, x_2, \cdots)$的空间，以上确界范数为范数。令

$$K=\{x\in l^\infty; x_1=0 \text{ 并且 } \lim_{n} x_n=1\}.$$

(a) 证明K是l^∞的闭子集。

(b) 设T是移位映射

$$T(x)=(0, x_1, x_2, x_3, \cdots),$$

证明$T(K)\subset K$。

(c) 证明T是弱收缩：

$$\|T(x)-T(y)\|_\infty\leqslant\|x-y\|_\infty,$$

但是在K中T没有不动点。

3. 若$0<c<1$，I是闭区间$[0, c]$，则

$$(Tf)(x)=1+\int_0^x f(t)\,dt$$

定义$C(I)$上的一个收缩，它的不动点满足带有初值条件$f(0)=1$的微分方程$f'=f$。从序列$T(0)$，$T^2(0)$，$T^3(0)$，…，你能得到什么近似解？

4. 你利用$C([0, c])$上怎样的收缩算子可以得到$f''+f=0$，$f(0)=a$，$f'(0)=b$的解？

5. 设S是平面上的正方形，从S去掉任何一个由直线段组成的序列，则剩余集在S中稠密。

6. 证明有理数集不是实直线上任何可列个开子集的交。

7. 证明例21中的每一个集U_{mn}是开的，并且在$C(I)$中稠密。

8. 在求解微分方程$y'=F(x, y)$时（例18），若F对每个变量是C^∞类函数，那么解是C^∞类吗？当F是实解析函数时，方程的解又怎样？

9. 设K是赋范线性空间中的紧集，$\{x_n\}$是K中不同点所成的序列（K的可列子集）。证明K上存在实连续函数，它在不同点x_k上取不同的值，即

$$f(x_k)\neq f(x_n),\qquad k\neq n.$$

6.5 紧　　性

在有限维赋范线性空间中，每一个闭的有界集是紧的。在一般赋范线性空间中，紧集没有如此简单的特征。当然，在一个不完备空间中，由于任一个不收敛的Cauchy序列就给出了一个有界序列而没有收敛子序列的例子，因此，在这个不完备空间中就没有闭有界集是紧的这个结论。但是，甚至在Banach空间L中，单位球

$$\{x\in L;\ \|x\|\leqslant 1\}$$

虽然是闭的而且是有界的，但除非L是有限维的，否则单位球仍不是紧的。在论证这点以前，我们先考虑某些具体的例子，解释在Banach空间中发生单位球的非紧性的原因。当然，这个Ban-

ach 空间是具有无限多个可移动的独立方向的。

例 22 在任一序列空间 l^p 中，$1\leqslant p\leqslant\infty$，向量

$$x_1=(1,\ 0,\ 0,\ \cdots),$$
$$x_2=(0,\ 1,\ 0,\ \cdots),$$
$$x_3=(0,\ 0,\ 1,\ \cdots),$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

构成球 $\|x_n\|_p=1$(对每一 n)中的序列。因为

$$\|x_m-x_n\|_p=2,\quad m\neq n,$$

故序列没有收敛的子序列。换言之，在序列中没有两个向量是互相接近的，序列是松散的。

在 Banach 空间中，也有同样的情况。带有上确界范数的 $C([0,\ 1])$ 就是实例。例如，若 $g_n=\frac{1}{\sqrt{n}}f_n$，式中 f_n 是图 25 中的帐蓬状函数。对每一个 n 有 $\|g_n\|_\infty=1$，当 $m\neq n$ 时有 $\|g_m-g_n\|\geqslant 1$。

在不是有限维的赋范线性空间 L 的单位球内，象例 22 中那样的"可分"序列也是存在的，我们要说明这一点。也就是要证明对给定的 r，$0<r<1$，存在向量 $x\in L$ 的序列，使得 $\|x_n\|\leqslant 1$，当 $m\neq n$ 时 $\|x_m-x_n\|\geqslant r$。可以用归纳法得到这些向量如下：对选好的 $x_1,\ \cdots,\ x_n$，在 L 的单位球中选择一点 x_{n+1}，使它和由 $x_1,\ \cdots,\ x_n$ 所张成的子空间尽可能地远。

我们需要关于距离的一些基本事实。设 M 是赋范线性空间 L 的非空子集，而 x 是 L 中的向量，从 x 到 M 的距离(当然)是

$$d(x;M)=\inf_{z\in M}\|x-z\|.$$

引理 设 M 是 L 的闭子空间，令 $x\in L$。

(i) $d(x;\ M)=0$ 当且仅当 $x\in M$。

(ii) 若 $y\in M$，则 $d(x+y;M)=d(x;M)$。

(iii) 对一切数量 c, $d(cx; M) = |c| d(x; M)$。

证明 (i) 相当于M是闭集。(ii) 设 $y\in M$, 则

$$d(x+y; M) = \inf_{z\in M}\|x+y-z\|.$$

由于M是子空间，并且 $y\in M$，当 z 跑遍M时，向量 $y-z$ 也跑遍 M：

$$\{y-z; z\in M\} = M.$$

这就证明了 (ii)。结论 (iii)，对于 $c=0$ 是平凡的，它只不过是说 $0\in M$。若 $c\neq 0$,

$$d(cx, M) = \inf_{z\in M}\|cx-z\|$$

$$= |c|\inf_{z\in M}\left\| x-\frac{1}{c}z\right\|.$$

当 z 跑遍M，$\left(\frac{1}{c}\right)z$ 也一样跑遍 M，即$\left(\frac{1}{c}\right)M = M$。因此，$d(cx; M) = |c| d(x; M)$。

引理 设M是赋范线性空间 L 的真闭子空间，则

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} d(x; M) = 1.$$

证明 设 $\|x\|\leqslant 1$，因为M包含零向量，$d(x; M)\leqslant\|x\|$。因此，

$$0\leqslant\sup_{\|x\|\leqslant 1} d(x; M)\leqslant 1,$$

令 $0<r<1$，我们要证明在 L 的单位球中有一个向量 x，满足 $d(x; M) = r$。这样就能证明引理。

由于M是真的，也是闭的，在 L 中存在向量 x_0，使

$$d(x_0; M) = \delta > 0.$$

由上面引理的(iii)

$$d\left(\frac{r}{\delta}x_0; M\right) = r.$$

由于 $r<1$，存在向量 $y\in M$，使

$$\left\|\frac{r}{\delta}x_0-y\right\|<1.$$

令

$$x=\frac{r}{\delta}x_0-y,$$

则$\|x\|<1$，并由上一引理的(ii)，有$d(x;M)=r$。

定理 6 设L是无限维的赋范线性空间，若$0<r<1$，在L中有向量的序列$\{x_n\}$，使得

(i) 对每一n，$\|x_n\|\leqslant 1$；

(ii) 当$m\neq n$，$\|x_m-x_n\|\geqslant r$。

证明 设x_1是L的单位球中任一(非零)向量，M_1是由x_1所张成的子空间。由于L不是有限维的，M_1是L的真子空间。由定理3，M_1是闭的。由上一引理，存在向量$x_2\in L$，使$\|x_2\|\leqslant 1$，并且$d(x_2;M_1)\geqslant r$。设M_2是由x_1和x_2所张成的子空间，则M_2是L的真闭子空间，故存在向量$x_3\in L$，$\|x_3\|\leqslant 1$，并且$d(x_3;M_2)\geqslant r$。继续进行下去：在选好了x_1，…，x_n以后，就可以在单位球内选择x_{n+1}，使得x_{n+1}到由x_1，…，x_n所张成的子空间的距离大于等于r。

系 赋范线性空间L为有限维的当且仅当它的闭单位球$\{x\in L;\|x\|\leqslant 1\}$是紧的。

证明 设L是有限维的，则在某一范数下，L可以和R^k（或C^k）一致。$R^k[C^k]$中范数的等价性告诉我们，对这一范数的闭单位球在其它范数的意义下也是闭而有界的。由 Heine-Borel 定理，它是紧的。

若L的单位球是紧的，它的每一序列有一聚点。由定理6，在单位球中，不存在可分序列。于是结论为L必须是有限维的。

单位球的非紧性指出，在无限维的赋范线性空间中，每一个紧集的内部是空的，也就是每一个紧集是"薄的"。然而，在这样的

赋范线性空间中紧集往往是重要的，我们对紧集还要再讲几句。

定理 7 设K是赋范线性空间L的子集，则下列几件事是等价的：

(i) K 是紧集。

(ii) K 是序列紧的，也就是在K中每一序列有收敛于K中点的子序列。

(iii) K 是完备的，并且对任一 $\varepsilon>0$, K 可以被有限个半径为 ε 的球所覆盖。

证明 设(i)成立．设$\{x_n\}$是K中序列．若$\{x_n\}$在K中没有聚点，则对K中每一x有邻域U_x，该邻域只对有限个n包含x_n．由于K是紧的，可以用集U_x中的有限个来覆盖K吗？

假定(ii)成立．在K中任一 Cauchy 序列必然收敛于K的点，这是因为序列的紧性保证了子序列收敛．（若 Cauchy 序列有任何收敛子序列，则整个序列收敛于子序列的极限．）设$\varepsilon>0$，要证明K可以被有限个ε-球覆盖．假定相反，在K中任选一点x_1，球$B(x_1;\ \varepsilon)$不覆盖K，因此在K中有一点x_2，$\|x_1-x_2\|\geqslant\varepsilon$。但$B(x_1,\ \varepsilon)$和$B(x_2;\ \varepsilon)$的并集也不覆盖$K$，所以在$K$中有一点$x_3$，$\|x_3-x_2\|\geqslant\varepsilon$ 和 $\|x_3-x_1\|\geqslant\varepsilon$。由归纳法，得到$K$中点$x_n$的序列，使得(对每一$n$)

$$\|x_n-x_k\|\geqslant\varepsilon,\qquad k=1,\ \cdots,\ n-1.$$

这样的序列（显然地）不能有任一收敛子序列．于是由(ii)推出了(iii)。

暂时颠倒过来由(iii)证明(ii)。假定(iii)成立，设$\{x_n\}$是K中任一序列．用有限个半径为1的(闭)球覆盖K。这些球中有一个必包含无限多个n的值所对应的x_n，选出一个这种闭球K_1。用有限个半径为$\frac{1}{2}$的闭球覆盖K_1。将每一个这样的闭球和K_1求

交，必有一个交包含无限多个 n 值所对应的 x_n，选出一个交 K_2。用半径为 $\frac{1}{3}$ 的球覆盖 K_2，如此反复进行下去，由归纳法，得到 K 中闭集套序列：

(i) $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$

(ii) $\lim\limits_{n} \operatorname{diam}(K_n) = 0$,

(iii) 对无限多个 k 的值，K_n 包含 x_k。

对每一 k，在 K_k 中选择 x_{n_k}。由(ii) $\{x_{n_k}\}$ 是 Cauchy 序列，由于 K 是完备的，(子)序列收敛于 K 的一点。

现在我们要从(iii)推出(i)。设(iii)成立，(象我们上面所证的) K 是序列紧的，这意味着 K 的任一可列开覆盖存在有限子覆盖。因此，为了证明 K 是紧的，我们只需要证明 K 的每一个开覆盖有可列子覆盖。这做法(几乎)和证明 Heine-Borel 定理（第2章定理 13）的方法一样，不过在证明中我们需要寻找替代物用以代替以有理数为中心并以有理数为半径的球。

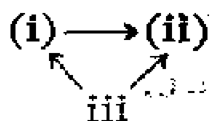
首先，必须寻找 K 的可列子集使它在 K 中稠密，可以如下进行。对每一个 n，在 K 中选有限个点，使以这些点为中心并且半径为 $\frac{1}{n}$ 的球覆盖 K，把这些点合并成一个集，它是 K 的可列子集，也是 K 的稠密子集。这是因为(对每一个 n) K 的任一点是在这些点中某一个点的距离为 $\frac{1}{n}$ 的范围之内。

第二，将上述可列子集的点排列出来：x_1, x_2, …。对任一 k，考虑关于 x_k 的以有理数为半径的一切开球，一切这样的球(当 k 变化)的全体是可列的，把它们排成 B_1, B_2, B_3, …。这一开球序列的重要性质是：每一个和 K 相交的开集包含一个集 B_n。

现在，设 $\{U_\alpha\}$ 是 K 的任一开覆盖。再设 N 是满足下列要求的

正整数组成的集；集N中每一个正整数n都使得B_n包含在某一个集U_α中。对每一个$n\in N$，选择足标α_n，使B_n包含在U_{α_n}中，于是$\{U_{\alpha_n}; n\in N\}$是K的可列(子)覆盖。

我们已经建立了



系 设S是Banach空间X的子集，则以下几件事等价。

(i) S的闭包是紧的。

(ii) 在S中每一序列有(在X中)收敛的子序列。

(iii) 对每一$\varepsilon>0$，S可以被有限个半径为ε的球所覆盖。

现在要证明Ascoli定理，对一类特殊的无限维赋范线性空间——在紧集上的连续函数空间——Ascoli定理刻划了该空间中紧集的特征。这是一个十分有用的定理，因为它保证了某种连续函数的序列有一致收敛的子序列。

设K是(在某一赋范线性空间中的)紧集。设$C(K)$是K上连续复值函数空间，配备有范数

$$\|f\|_c=\sup\{|f(x)|; x\in K\}.$$

设S是$C(K)$的子集，即K上的一族连续函数。假设S(的闭包)是紧的，我们看一下S是Banach空间$C(K)$中的紧集意味着什么。

令$\varepsilon>0$，我们可以用有限个ε球覆盖S。换言之，在S中存在函数$f_1, \cdots, f_n$，使对任一$f\in S$，开球

$$\{f, \|f-f_k\|_c<\varepsilon\}, \quad k=1, \cdots, n. \tag{6.33}$$

中有一个包含f。(在S中存在有限个函数，使S中任一个f是一致地在某一个这样函数的ε距离内。)正如有些聪明人曾经指出，这表示S中函数是"等度连续"的，即若x接近y，则对S中一切f一致地有$f(x)$靠近$f(y)$。特别，对给定ε，象在(6.33)中那样

选择 $f_1, \cdots, f_n$。每一个 f_k 是一致连续的，因此

$$|f_k(x)-f_k(y)|<\varepsilon, \qquad x, y\in K, \qquad |x-y|<\delta_k.$$

取 δ 是数 δ_k 中最小的一个，则

$$|f_k(x)-f_k(y)|<\varepsilon, \qquad x, y\in K, \qquad |x-y|<\delta. \tag{6.34}$$

设 f 是 S 中任一函数，存在 k，$1\leqslant k\leqslant n$，使 f 一致地在 f_k 的 ε 距离内，因此

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f_k(x)| + |f_k(x)-f_k(y)| + |f_k(y)-f(y)|,$$

$$|f(x)-f(y)|<3\varepsilon, \quad x, y\in K, \quad |x-y|<\delta.$$

定义 设 S 是集 K 上的一族函数，设 $x\in K$，如果对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon, \quad y\in K, \quad |x-y|<\delta, \quad f\in S.$$

就称族 S **在 x 是等度连续的**。若对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon, \quad x, y\in K, \quad |x-y|<\delta, \quad f\in S.$$

就称族 S 是**(一致)等度连续**的。

刚才我们已经证明了 $C(K)$ 的每一紧集是（一致地）等度连续的。Ascoli 定理本质上是它的逆命题。在我们尚未证明 Ascoli 定理之前，我们用一些例子来加深对等度连续性意义的理解（读者可以继续定理的证明，然后再回到例子）。

例 23 设 $K=[a, b]$ 是实直线上的闭区间。在 $[a, b]$ 上的最简单（有趣）的等度连续函数族是由导数的估计得到的。对光滑函数 f，有

$$f(x)=C+\int_a^x f'(t)dt;$$

因此

$$|f(x)-f(y)|=\left|\int_y^x f'(t)dt\right| \leqslant|x-y|\sup|f'|.$$

现在考虑 C^1 类函数中导数以 3 为界的函数全体。对这些函数，从 $f(x)$ 到 $f(y)$ 的距离有一致的估计：

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 3|x-y|.$$

所以，"给定 ε，可以选到同时适用于族中一切 f 的一个 δ"。这意味着等度连续性。显然可推广这一例子到下述情形。令 $M>0$，S 是$[a, b]$上一切可微且导数以 M 为界的函数族，则 S 是$[a, b]$上(一致地)等度连续函数族。

例 24 在各种各样问题中(例如求解微分或积分方程)，常遇到以下类型的积分算子(运算)。假如在长方形 $[a, b]\times[c, d]$ 上给定连续函数 K，我们可以定义变换

$$C([c, d])\xrightarrow{T}C([a, b]),$$

T 是这样定义的：

$$(Tf)(x)=\int_c^d f(t)K(x, t)dt.$$

现在

$$(Tf)(x)-(Tf)(y)=\int_c^d f(t)[K(x, t)-K(y, t)]dt.$$

因此，

$$|(Tf)(x)-(Tf)(y)|\leqslant M(x, y)\int_c^d |f(t)|dt,$$

式中

$$M(x, y)=\sup\{|K(x, t)-K(y, t)|; c\leqslant t\leqslant d\}.$$

由于 K 是连续的，

$$\lim_{|x-y|\to 0}M(x, y)=0.$$

因此，显然 T 把 $\{f; \int|f|\leqslant 1\}$ 变换成一个等度连续函数族，即

$$S=\left\{Tf; \int_c^d |f|\leqslant 1\right\}$$

是等度连续的。

例 25　设D是复平面中的开单位圆盘，f是D上复解析函数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,$$

暂时假定f在闭圆盘$\bar{D}$上解析，即在半径$1+\varepsilon$的圆盘内，f的幂级数收敛。如我们已经看到的，有Cauchy公式(5.38)：

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z-\alpha}dz \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-\alpha}e^{i\theta}d\theta. \end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned} |f(\alpha)-f(\beta)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{i\theta})e^{i\theta}\left[\frac{1}{e^{i\theta}-\alpha}-\frac{1}{e^{i\theta}-\beta}\right]d\theta\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})|\left|\frac{\alpha-\beta}{(e^{i\theta}-\alpha)(e^{i\theta}-\beta)}\right|d\theta \\ &\leqslant |\alpha-\beta|\,\|f\|_{\infty} \\ &\quad\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|e^{i\theta}-\alpha|^{-1}|e^{i\theta}-\beta|^{-1}d\theta. \end{aligned}$$

如果限制α,β在某个闭子圆盘上

$$D_r=\{\alpha;|\alpha|\leqslant r\},$$

则

$$\begin{aligned} |e^{i\theta}-\alpha| &\geqslant 1-|\alpha| \\ &\geqslant 1-r. \end{aligned}$$

所以

$$|f(\alpha)-f(\beta)|\leqslant|\alpha-\beta|\frac{\|f\|_{\infty}}{(1-r)^2},\qquad \alpha,\beta\in D_r. \tag{6.35}$$

显然，若f只不过在D上解析，仍满足同样的不等式。

由(6.35)立即得到，若$M>0$，D上以M为界的复解析函数族在每一个紧子圆盘D_r上是(一致地)等度连续的。等度连续性是

复解析函数的另一重要性质。

定理 8(Ascoli) 设K是（赋范线性空间中的）紧集。S是$C(K)$的子集，则S为紧集当且仅当S是闭的、有界的和(一致)等度连续的。

证明 我们利用等度连续的定义已经证明了定理中"仅当"的部分。剩下要证明在$C(K)$中闭的，有界的等度连续函数族是紧的，这只要建立序列紧性就够了。设$\{f_n\}$是K上复值的等度连续函数序列，它是有界的：

$$\|f_n\|_\infty \leqslant M, \quad n=1, 2, 3, \cdots$$

我们必须从$\{f_n\}$抽取一致收敛的子序列。基本事实是：若$\{f_n\}$是有界等度连续函数序列，对$\varepsilon>0$，存在子序列，使子序列中一切函数之间，相距一致地小于ε（即子序列中一切函数位于某个$C(K)$中的ε球内）。如果我们已经建立了这一基本事实，一致收敛的子序列的存在性证明就十分容易：选择$C(K)$中半径为1的球，它包含无限多个n值所对应的f_n。把"基本事实"用于球内的f_n，再选取半径为$\frac{1}{2}$的球，它包含无限多个n值的f_n，等等。由归纳法就得到$C(K)$中的序列$B_1\supset B_2\supset\cdots$，使(i) $\operatorname{diam}(B_n)\to 0$和(ii)任一$B_n$包含无限多个值$k$的$f_k$。从$B_k$中选出$f_{n_k}$就得到了我们所寻找的子序列。

所以，现在需要证明基本事实。给定ε，由等度连续性决定δ：

$$(3.36) \qquad |f_n(x)-f_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}, \quad x, y\in K, \quad |x-y|<\delta.$$

在K中选择点$x_1, \cdots, x_N$，使开球$B(x_k; \delta)$覆盖K。为了保证

$$\|f_m-f_n\|_\infty<\varepsilon,$$

只要有

$$(6.37)\qquad |f_m(x_k)-f_n(x_k)|<\frac{\varepsilon}{3},\qquad k=1,\ \cdots,\ N$$

就够了。这只要根据(6.36)并选择$x_1,\ \cdots,\ x_N$:

$$|f_m(x)-f_n(x)|\leqslant|f_m(x)-f_m(x_k)|+|f_m(x_k)-f_n(x_k)|$$
$$+|f_n(x_k)-f_n(x)|.$$

但是，寻找满足下述条件的子序列是很普通的：对子序列中任何一对f_m和f_n，它们的差(f_m-f_n)在有限个点$x_1,\ \cdots,\ x_N$上的值小于$\frac{\varepsilon}{3}$。因为$\{(f_n(x_1),\ \cdots,\ f_n(x_N))\}$是$C^N$的有界子集，因而对任一集上的任何有界函数序列都可这样做。

系 设$\{f_n\}$是紧集K上的复连续函数序列，它是有界并且(一致)等度连续的，则存在子序列$\{f_{n_k}\}$，它在K上一致收敛。

系 设D是平面中的开集，$\{f_n\}$是D上复解析函数序列。若序列是有界的，

$$\|f_n\|\leqslant M,\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

则在D的任何紧子集上有一致收敛的子序列。

证明 如同我们在例25中所证明的，在D内的每一个闭圆盘上，有界复解析函数序列是一致等度连续的。由Ascoli定理，显然有：若K是D的任一紧子集，则在K上存在一致收敛的子序列。我们要寻找一个子序列，它在D中一切紧集K上同时一致收敛。

把D写作递增的紧集序列的并集。例如，设K_n是点z组成的集，这些z使得

(i) $z\in D$;

(ii) $|z|\leqslant n$;

(iii) 从z到D的边界的距离不小于$\frac{1}{n}$，

则K_n是紧的，

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots$$

$$D = \bigcup_n K_n.$$

假如给定了在D的任何紧子集上的有界解析函数序列 f_n，选取子序列 $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \cdots$，使子序列 S_n 中的一切函数在集 K_n 上相互间的距离一致地小于 2^{-n}。于是在D的任一紧子集上，任一子序列

$$f_{n_k} \in S_k$$

一致收敛。

习　题

1. 设$\{f_n\}$是闭区间$[a, b]$上的C^1类函数序列，则$\{f_n\}$是等度连续的当且仅当导数序列$\{f_n'\}$在上确界范数下有界，这命题正确吗?

2. 若$\{F_n\}$是$[a, b]$上有界变差函数序列，若每一个F_n的全变差最多是1，函数

$$f_n(x) = \int_a^x dF_n(t)$$

的序列等度连续吗?

3. 如果您不知道 Ascoli 定理，你能明显地看出在 $[0, 1]$ 上任意一个其导数以 6 为界的光滑函数序列在$[0, 1]$上有一致收敛的子序列吗?

4. 令

$$C([0, 1]) \xrightarrow{T} C([0, 1])$$

是一个映射，它被定义为

$$(Tf)(x) = \int_0^1 f(t) K(x, t) dt,$$

式中K是正方形$[0, 1] \times [0, 1]$上的连续函数。设B是$C([0, 1])$的有界子集，则集$T(B)$在$C([0, 1])$中有紧的闭包。

5. 设l^1是(绝对)可和序列空间:

$$x = (x_1, x_2, x_3, \cdots),$$

$$\|x\|_1 = \sum_n |x_n| < \infty.$$

在 Banach 空间 l^1 中，考虑子集

$$S=\{x;\ |x_n|\leqslant\frac{1}{n^2},\ n=1,2,3,\cdots\},$$

S 是紧集吗?

6. 设 f 是闭区间[0, 1]上的复连续函数, $f(0)=0$, 且 $\|f\|_\infty\leqslant 1$. 证明幂序列 $f, f^2, f^3, \cdots$ 是等度连续的当且仅当 $\|f\|_\infty<1$.

7. 举出[0, 1]上连续函数 f 的例子, 使 $f(0)=0$, $\|f\|_\infty=1$, 在赋范线性空间 $C([0,1])$ (范数取积分范数 $\|\cdots\|_1$)中, 幂序列 $\{f^n\}$ 有紧闭包.

8. 设 S 和 T 是赋范线性空间 L 的紧子集, 则代数和 $S+T$ 是紧的. (提示: 加法是连续的.)

9. 设 $C_B(R)$ 是实直线上的有界连续复值函数空间, 用上确界范数

$$\|f\|_\infty=\sup_R|f|$$

所装备. 设 $f\in C_B(R)$, $t\in R$, f 的 **t-平移**是函数

$$f_t(x)=f(x+t).$$

若对某一 $t\neq 0$, $f_t=f$, 就称 f 是**周期**的. 证明, 若 f 是周期的, 则 f 的一切平移所成的集是 $C_B(R)$ 的紧子集. (提示: 考虑把 t 映成 f_t 的映射.)

10. 参考习题 9. 函数 $f\in C_B$, 如果 f 的一切平移集在 $C_B(R)$ 中有紧闭包, 称 f 是**殆周期**的. 证明:

(a) 两个殆周期函数的和是殆周期的; 因此, 任一指数多项式

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k e^{it_k x},\quad t_k\in R,\quad c_k\in C$$

是殆周期的.

(b) 两个殆周期函数的积是殆周期的.

(c) 殆周期函数空间是 $C_B(R)$ 的闭子空间.

11. $f\in C_B(R)$ 是殆周期的当且仅当对任一 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使任一长度为 δ 的区间包含数 t, 且

$$\|f-f_t\|_\infty<\varepsilon.$$

(提示: 用 ε-球覆盖平移集.)

12. 设 n 是正整数, $a_0, \cdots, a_n$ 是实直线的闭区间 I 上的连续实值(复值)函数. 假如 a_n 在 I 上没有零点, 则任一在 I 上满足微分方程

$$a_0f+a_1f'+\cdots+a_nf^{(n)}=0$$

的函数将是 C^n 类. $C^n(I)$ 上的范数取为

$$\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty+\cdots+\|f^{(n)}\|_\infty.$$

(a) 设 M 是微分方程的解集, 则 M 是 $C^n(I)$ 的闭子空间;

(b) 利用Ascoli定理和ϕ_n没有零点的事实证明M的闭单位球是紧的，因此，M是有限维的。

6.6 商 空 间

设L是线性空间，M是L的(线性的)子空间。由(L, M)可构造一个线性空间L/M，通常把它叫做L关于模M的商（或差）空间。我们要利用商空间讨论赋范线性空间的完备化。

粗糙地说，L/M是由L中线性运算所得的线性空间。在这线性运算下，L中两个向量的差如果是子空间M中的向量，就把这两个向量叫做"相等"。

设x和y是L中向量，我们说x是y关于模M的同余，并写成

(6.38) $$x \equiv y, \quad \operatorname{mod} M,$$

这意思是指差$(x-y)$在M中。关于模M的同余具有等式的三个性质：

(a) 对L中任一x，$x \equiv x$。

(b) 若$x \equiv y$，则$y \equiv x$。

(c) 若$x \equiv y$和$y \equiv z$，则$x \equiv z$。

这些结果可利用定义和以下事实得出：(a) 零向量在M中，(b) M中任一向量的负向量仍在M中，(c) M中两个向量的和仍在M中。

同余可以相加或用数量乘：

(d) 若$x_1 \equiv y_1$和$x_2 \equiv y_2$，则$x_1 + x_2 \equiv y_1 + y_2$。

(e) 若$x \equiv y$，则$cx \equiv cy$。

这些结果从M在向量加法和数量乘法下是封闭的事实直接可以得到。从(d)和(e)可以合法地得到同余的线性组合：若$x_i \equiv y_i$，$i = 1, \cdots, n$并且若$c_1, \cdots, c_n$是数量，则

$$c_1x_1+\cdots+c_nx_n\equiv c_1y_1+\cdots+c_ny_n.$$

在不顾M中向量的情况下(M中向量和0同余)，性质(a)-(e)使得在L中进行线性运算是正当的。让我们来考虑一个这一类事情中的简单而有趣的情况。

例 25 我们讨论区间$[a, b]$上的分段连续函数的积分问题。从积分观点来看，在线性空间$L=PC([a, b])$中有哪些函数在线性运算下可以被忽略呢？它们是这样的函数：除去有限个点，其函数值都是0。这些函数正好是分段连续函数f，并且

$$\int_a^b |f|=0.$$

我们把这种函数看作L中的"零"函数，设M是"零"函数组成的子空间，则

$$f\equiv g, \quad \mathrm{mod} M$$

意味着除了有限个x的值外，$f(x)=g(x)$，特别可推出

$$\int_a^b f=\int_a^b g.$$

可以用这样的方法来处理：把关于模M同余的函数看成是一样的，这时它们的积分就不会有差别了。

有另一种方法来看待关于模子空间M的线性运算，这就导致商空间L/M的概念。我们要求模M的运算真正对应于某一向量空间中的线性运算和关系。如果这样做好了，那么对给定向量x，和x同余的一切向量可作为同一个向量看待，即由新空间中一个向量作代表，这个代表向量将是集

$$Q(x)=\{y\in L; x\equiv y, \mathrm{mod} M\}. \tag{6.39}$$

注意$Q(x)$是L的十分特殊类型的子集，它是子空间M的x-平移：

$$Q(x)=x+M$$
$$=\{x+z; z\in M\}.$$

在图 26 中，当 L 是 R^2，M 是过原点的直线的情况下，画出了对选出的两个 x 点的平移集。

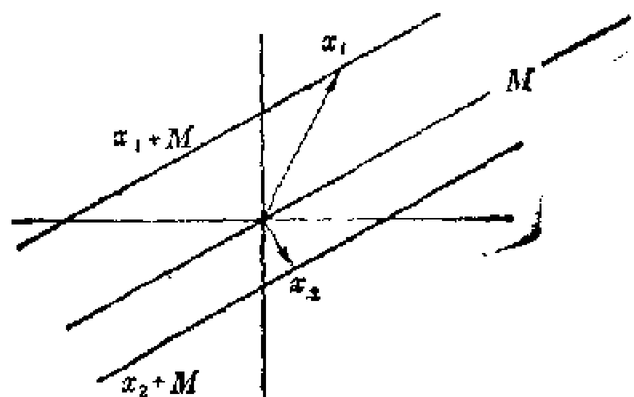


图 26

以下条件是等价的：

(i) $Q(x)=Q(y)$。

(ii) x 和 y 位于 M 的同一个平移中。

(iii) $x+M=y+M$。

(iv) y 在 M 的 x-平移中。

(v) $y\in Q(x)$。

现在令 L/M 是 M 的一切(不同的)平移，在 L/M 上向量加法和数量乘法定义如下：

$$Q(x_1)+Q(x_2)=Q(x_1+x_2),$$

(6.40)

$$cQ(x)=Q(cx).$$

换句话说，在 L/M 中的运算将用下法来定义，并且映射

(6.41)
$$L\xrightarrow{Q}\frac{L}{M}$$

是线性变换。

定理 9 设 L/M 是子空间 M 的一切平移所组成的集。利用线性变换

$$Q(x)=x+M,$$

可以在集 L/M 上给出线性空间的结构，并且 L/M 上的这一结构是唯一的。

证明 设 T_1 和 T_2 是 M 的平移。如果 Q 是线性的，则 T_1 和 T_2 相加的规则是：任选向量 $x_i \in T_i$，即对每一个向量 x_i 有 $Q(x_i)=T_i$，令

$$T_1+T_2=Q(x_1+x_2). \tag{6.42}$$

对已定义好的可加平移还需要知道些什么呢？我们必须验证平移 $Q(x_1+x_2)$ 不依赖于 x_1 和 x_2 的选择，即它对一切 $x_1 \in T_1$ 和 $x_2 \in T_2$ 都是一样的。然而，这不过是关于模 M 同余的性质 (d) 的简单复述，性质(d)指出，同余向量的和是同余的。

设 T 是 M 的平移而 Q 是线性的，定义 cT 的规则必须是：任选向量 $x \in T$，即使得 $Q(x)=T$ 的任一 x，令

$$cT=Q(cx).$$

必须再次验证对 T 中一切向量 x，$Q(cx)$ 是同一个集。这是关于模 M 同余的性质(e)的复述，性质 (e) 指出，数量乘法保持同余。

我们已经证明了有一种也只有一种方法定义 L/M 上的向量加法和数量乘法使(6.40)成立。为了证明在这些运算下 L/M 是线性空间，我们必须验证 6.1 节的性质(1)—(9)，这是线性空间的性质：加法是可结合的，加法是可交换的，在加法上的数乘是可分配的，等等。有了满足 (6.40) 的映射 Q，做这些事是极其容易的。每一个性质都从空间 L 的对应性质得到，当然，在 L/M 中的零向量是 $Q(0)=M$。

线性空间 L/M 叫做 L 关于模 M 的**商空间**，而与之相关的映射 Q 叫做**商映射**。

设 L 是赋范线性空间，M 是 L 的闭子空间，则在商空间 L/M 上有一个"自然"的范数。M 的平移范数定义为 L 中原点到它的距

离：

$$(6.43)\qquad |||T||| = \inf_{y\in T}\|y\|.$$

当然，这可以改写为

$$|||x+M||| = \inf_{z\in M}\|x+z\|,$$

这等于说，“$Q(x)$的范数是从x到M的距离”。

引理 设L是线性空间，M是L的子空间，令$\|\cdots\|$是L上的半范数。由(6.43)所定义的函数$|||\cdots|||$是L/M上的半范数。当M是闭的(在序列收敛性下)，它还是范数。

证明 我们验证半范数的三个性质。

(i) 对每一个平移T，由于$\{\|y\|; y\in T\}$是非负数的非空集，所以$0\leqslant |||T||| < \infty$。

(ii) 为了验证三角不等式，设T_1和T_2是M的平移。设$x_1\in T_1$; $x_2\in T_2$，则$(x_1+x_2)\in(T_1+T_2)$。于是

$$\begin{aligned}|||T_1+T_2||| &\leqslant \|x_1+x_2\|\\ &\leqslant \|x_1\|+\|x_2\|,\end{aligned}$$

对一切$x_1\in T_1$和$x_2\in T_2$上式成立，因此有

$$|||T_1+T_2||| \leqslant |||T_1||| + |||T_2|||.$$

(iii) 设T是M的平移，c是数量

$$\begin{aligned}|||cT||| &= \inf_{x\in T}\|cx\|\\ &= \inf_{x\in T}|c|\,\|x\|\\ &= |c|\inf_{x\in T}\|x\|\\ &= |c|\,|||T|||.\end{aligned}$$

为了验证$|||\cdots|||$是范数的断言，我们考虑平移T，使$|||T||| = 0$。由定义，在T中存在序列$\{x_n\}$使

$$\lim_n\|x_n\| = 0.$$

固定T中向量x，使$T=x+M$，则每一x_n有形式

$$x_n = x + z_n, \quad z_n \in M.$$

于是

$$\lim_n \|x + z_n\| = 0$$

或

$$\lim_n (-z_n) = x.$$

若M是闭的，这就推出$x \in M$。于是$T = M$，零向量在L/M中。

[半]范数$|||\cdots|||$叫做L/M上的**商[半]范数**。在L具有某个特定范数的情况下，通常总是假定在L/M中取上面所说的商范数。值得注意，商映射

$$L \xrightarrow{Q} \frac{L}{M}$$

是从L到L/M上的连续线性变换。Q的(一致)连续性直接从Q是线性和$|||Q(z)||| \leqslant \|z\|$的事实得出：

$$|||Q(x) - Q(y)||| = |||Q(x-y)||| \leqslant \|x - y\|.$$

上述引理最重要的情况是当L是赋范线性空间而M是闭线性子空间的情形。在有限维赋范线性空间中，每一个子空间是闭的，然而一般情况并不如此。例如，M可以在L中稠密如多项式在区间上的连续函数空间中稠密一样，但对这种情况下的商空间L/M相对地说来，我们较少兴趣。至于在赋范线性空间中，为什么取闭线性子空间的情况最重要，我们就没有时间来进行讨论了。

这一引理还有一种特殊情况我们颇感兴趣。

例 27 设$\|\cdots\|$是L上的半范数，M是零向量集：

$$M = \{x \in L;\ \|x\| = 0\}.$$

容易看出，M是L的线性子空间，M在序列收敛性下是闭的。因此，在L/M上的商半范数确是范数。在这种情况下，它有一个很特别的性质：

$$\|Q(x)\|=\|x\|.$$

其实，构造商空间 L/M 的方法是很自然的，就是 L“除以”零向量空间 M。

考察例 26 的一个特殊情况，即当 L 是分段连续函数空间，取积分半范数

$$\|f\|_1=\int_a^b|f|.$$

用半范数是零的函数集去除 L 产生一个新的线性空间，在这个新空间中，把只在有限个点上不相同的函数看成同样的函数。

商空间中的向量不容易描述，只好说它们是某一函数类。因此，常常象例 26 那样运用特殊类型的商空间：在 L 中利用关于模零向量的同余代替相等进行线性运算。

关于上一引理的证明有一点要注意，在有关半范数线性空间的课文中，我们没有讨论收敛性、开集、闭集、完备性等等。如果可以做的话，这是容易而自然的，因为这些事情形式上和赋范空间中是同样的。但是有一个混乱的地方：一个序列的极限可以多于一个。对

$$\lim_n x_n=x,$$

$$\lim_n x_n=y,$$

只告诉我们 $\|x-y\|=0$，于是，$y=x+z$，式中 z 是零向量。因此，若序列收敛，它的极限点集是零向量子空间的平移。特别，任一闭线性子空间包含零向量空间，当我们利用一个闭子空间来构造商空间时，这就是商半范数自动成为范数的原因。

定理 10 设 L 是完备半赋范线性空间，M 是闭线性子空间，则 L/M 是 Banach 空间。

证明 我们要证明 L/M 是完备的，这只要证明在 L/M 中任一快速 Cauchy 序列收敛就行了。设 $\{T_i\}$ 是这样的一个序列：

(6.44) $$\sum_{n=1}^{\infty} |||T_n - T_{n+1}||| < \infty.$$

设 Q 是商映射：

$$L \xrightarrow{Q} \frac{L}{M}.$$

由商范数的定义，对每一正整数 n，存在 L 中向量 z_n，使得

$$Q(z_n) = T_n - T_{n+1},$$

(6.45)

$$\|z_n\| < |||T_n - T_{n+1}||| + 2^{-n}.$$

任选向量 x_1 使得 $Q(x_1) = T_1$，定义

$$x_n = x_1 - (z_1 + \cdots + z_{n-1}), \qquad n = 2, 3, 4, \cdots$$

于是

$$x_n - x_{n+1} = z_n, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

由(6.44)和(6.45)，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - x_{n+1}\| < \sum_{n=1}^{\infty} |||T_n - T_{n+1}||| + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$$

由于 L 是完备的，所以快速 Cauchy 序列 $\{x_n\}$ 收敛，

$$\lim_n x_n = x.$$

又因为 Q 是连续的，

$$\lim_n Q(x_n) = Q(x),$$

但是，由于 $Q(x_1) = T_1$， $Q(x_{n+1} - x_n) = Q(-z_n) = T_{n+1} - T_n$，对每一 n，有 $Q(x_n) = T_n$。于是在 L/M 中，$\{T_n\}$ 收敛于向量 $T = Q(x)$。

习 题

1. 对 R^3 配备标准范数(即长度)。设 M 是 R^3 的任一线性子空间，例如通过原点的线或平面。设 $M^\perp$ 是和 M 正交的一切向量所成的集

$$M^\perp = \{x; \langle x, z\rangle = 0, \text{一切 } z \in M\}$$

(a) 证明 $M^{\perp}$ 是 R^3 的子空间。

(b) 设 $x \in R^3$, 证明只有一个向量 $z \in M$ 可达到下确界

$$\inf_{z \in M} \|x - z\|,$$

并且(对这个向量) $x - z$ 在 $M^{\perp}$ 中。

(c) 任一向量 $x \in R^3$ 可唯一表达成形式 $x = y + z$, 式中 $y \in M^{\perp}$ 而 $z \in M$。

(d) 商空间 R^3/M 和 $M^{\perp}$ 相一致，这只要证明M的每一平移只含一个 $M^{\perp}$ 中向量 y, 而平移的(商)范数是 y 的长度。

2. 设 L 是闭区间 $[-1, 1]$ 上的连续实(复)值函数空间，配备上确界范数。M是 L 中偶函数集：

$$f(-x) = f(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

(a) 证明M是 L 的闭子空间。

(b) 证明M的任一平移只包含一个奇函数：

$$g(-x) = -g(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

(c) L/M 和奇函数空间相一致。

(d) 在 L/M 的商范数和奇函数的上确界范数之间有一个简单关系吗?

3. 设M是线性空间 L 的子空间，设T是从 L 到某一线性空间N的线性变换：

$$L \xrightarrow{T} N.$$

$$T(cx + y) = cT(x) + T(y).$$

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{Q} & \dfrac{L}{M} \\ & {\scriptstyle T}\searrow & \downarrow {\scriptstyle S} \\ & & N. \end{array}$$

假如对每一 $z \in M$, $T(z) = 0$. 证明存在从 L/M 到N中的线性变换，使T是 S 和商映射 Q 的复合：

4. 设M是赋范线性空间 L 的闭子空间。证明U是 L/M 的开子集当且仅当 $Q^{-1}(U)$ 是 L 的开子集。

5. 设T是赋范线性空间 L 到赋范线性空间N的线性变换，证明下列条件等价

(i) T 是连续的。

(ii) 存在常数 $M > 0$, 对一切 $x \in L$, 使得

$$\|T(x)\| \leqslant M\|x\|.$$

6. 设 L 是赋范线性空间，f 是 L 上线性泛函，即 f 是从 L 到数量场中的线性变换。证明 f 为连续的当且仅当零空间 $\{x; f(x) = 0\}$ 是 L 的闭子空

间。

7. 设M是赋范线性空间L的闭子空间。证明在商映射

$$L \xrightarrow{Q} \frac{L}{M}$$

下，开单位球$B(0, 1)$的象正好是L/M中关于原点的开单位球。

8. 设L是线性空间。对L的任意子集有自然的方法定义它们的和以及数量乘法：

$$A+B=\{x+y;\ x\in A,\ y\in B\}$$

$$cA=\{cx;\ x\in A\}。$$

(a) 参看6.1节定义线性空间的性质(1)—(8)。证明L的一切子集全体加上这些运算满足除了零向量存在性和负向量存在性外的一切条件。

(b) 设M是L的子空间。证明L/M，M的平移集，在上述运算下是向量空间。(确实，这些运算和我们对L/M所介绍的线性运算相一致。)

(c) 在集族中所定义的运算下，要使子集族能成为线性空间，证明(b)所描述的方法是唯一的方法。换句话说，要求证明：若L的一族子集在这些运算下组成一个线性空间，那末它必是L的某一子空间的平移族。

6.7 空间的完备化

赋范线性空间L可以完备化成为Banach空间，即可以把L稠密地嵌入Banach空间，知道这一事往往是有益的。若L不是完备的，这表示L必定有"空穴"，它是某一Cauchy序列未达到的极限，而我们则要填满一切空穴。

设$S=\{x_n\}$是L中Cauchy序列，但不收敛，我们要把序列的极限点补充到L中去。若对每一个这样的序列，都把它们的极限点补充到L中去，将实现L的完备化。但要留心，若有两个Cauchy序列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，而且如果$\{x_n-y_n\}$收敛于0，则显然我们不能对两个序列添上不同的极限。

给定任一赋范线性空间L，我们将L中一切Cauchy序列组成空间Cauchy(L)。若

$$S=\{x_n\},$$

$$T=\{y_n\}$$

是L中两个 Cauchy 序列，它们的和是

$$S+T=\{x_n+y_n\},$$

这仍是一个 Cauchy 序列。在 Cauchy(L) 中数量乘法被定义成

$$cS=\{cx_n\}。$$

我们所说的一切是：考虑L中一切向量序列的空间，即从Z_+到L中的一切函数的空间，则 Cauchy(L) 是这一空间的线性子空间。

在 Cauchy(L) 上引进半范数：

$$\|S\|=\lim_n\|x_n\|。\tag{6.46}$$

若$\{x_n\}$是 Cauchy 序列，则$\{\|x_n\|\}$是R中 Cauchy 序列，因此上述极限存在。因为$\|S\|=0$不一定有$S=0$，因此是"半范数"。其实，$\|S\|=0$当且仅当$S=\{x_n\}$收敛于 0。

现在请注意，Cauchy(L)是完备的，即在 Cauchy(L)中任一 Cauchy 序列在该空间中收敛。设$\{S_n\}$是Cauchy(L)中的Cauchy 序列：

$$S_n=(x_{n1},\ x_{n2},\ x_{n3},\ \cdots)$$

对每一k，存在正整数N_k使得

$$\|x_{km}-x_{kn}\|<\frac{1}{k},\ m,\ n\geqslant N_k。\tag{6.47}$$

在$n\geqslant N_k$的点x_{kn}中任选一点叫做y_k：

$$\|y_k-x_{kn}\|<\frac{1}{k},\qquad n\geqslant N_k。\tag{6.48}$$

令T_k是常数序列

$$T_k=(y_k,\ y_k,\ y_k,\ \cdots)。$$

这必然是 Cauchy 序列。此外，由(6.48)

$$\|S_k-T_k\|\leqslant\frac{1}{k}。\tag{6.49}$$

由于$\{S_n\}$是Cauchy序列，由(6.49)，$\{T_n\}$ 是Cauchy序列，即$\{y_n\}$是L中Cauchy序列，但是在空间Cauchy(L)中，$\{T_n\}$显然收敛，它收敛于Cauchy序列

$$S=(y_1, y_2, y_3, \cdots).$$

所以S_n也收敛于S。

定理 11 任一赋范线性空间是Banach空间的稠密子空间。

证明 我们有完备的空间Cauchy(L)，且对于如何把L嵌入Cauchy(L)是很清楚的。把x和常数序列等价是一样的。唯一的问题是Cauchy(L)上只有半范数。注意，可以用零序列集去除，就象例27一样。

设Null(L)是半范数为零的Cauchy序列空间，即它是L中零序列(收敛于0的序列)所成的空间。根据定理10，由这样的子空间所产生的商空间是Banach空间。设$P(x)$是常数序列$P(x)=(x, x, x, \cdots)$，Q是商映射，那么L被嵌入Banach空间能够由

$$L\xrightarrow{P}\text{Cauchy}(L)\xrightarrow{Q}\frac{\text{Cauchy}(L)}{\text{Null}(L)} \tag{6.50}$$

来实现。其中，复合$Q\circ P$保持范数，这是由于P和Q都是赋范的。特别地，$Q\circ P$也是1:1的。由于P、Q是线性变换，故$P\circ Q$也是线性变换。L的象在商Banach空间中稠密。这一证明留作习题。

习　题

1. 验证L到Cauchy(L)中的自然内射把L映射到稠密子空间上。

2. 利用6.6节习题5的结果证明：设T是赋范线性空间L到Banach空间M的连续线性变换，则T可唯一地扩张成从$\overline{L}$到M的连续线性变换。($\overline{L}$表示L的完备化)。

3. 设L是内积空间，证明它完备化所得的Banach空间也是一个内积空间。

第 7 章　Lebesgue 积分

7.1　产生 Lebesgue 积分的原动力

我们将要讨论的一种积分，是比第 4 章中已经给出的 Riemann 积分更为一般同时也更加有用．这一积分是在本世纪初由 H. Lebesgue 发展起来的．我们说它比 Riemann 积分更为一般是反映在下面两个论述上．

(i)　每一个 Riemann 可积的函数 f 必定是 Lebesgue 可积的．并且这两种过程给出相同的积分值．

(ii)　Lebesgue 可积函数类中包含着许多函数，例如，无界函数或在无界区域上的函数，它们都不是通常的 Riemann 可积函数，而是按传统将它们处理为“反常积分”．

虽说这一积分过程扩大了应用的范围，但这还不足以说明为什么我们要去发展 Lebesgue 积分，这是因为不难将 Riemann 过程修改一下，就可以获得这样的数学论断：

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

这种更一般的积分方法的重要意义和威力是来自于这样一个事实，那就是 Lebesgue 可积函数类在许多意义下是“完备”的．这就要求我们首先去参考第 6 章中已经讨论过的完备性概念．

(iii)　Lebesgue 可积函数组成的线性空间关于(半)范数

$$\|f\|_1 = \int |f|$$

是完备的，也就是说，它是(半范数)Banach 空间．

完备性可以用其他形式表示出来，但为了评价其重要意义，要求我们采用一种特别的观点。我们应当改变这样一种看法，那就是把积分看成某些特殊的函数的求积过程，而应该把它当作所有可积函数组成的空间（集合）上的一个算子（函数），

$$I(f)=\int f.$$

这一算子是线性的

$$I(cf+g)=cI(f)+I(g)$$

和正的

$$I(f)\geqslant 0 \quad 若\ f\geqslant 0.$$

Lebesgue 的光辉思想是将注意力集中在积分的另一个关键性的性质上，这一性质我们可以称之为弱连续性：若 $f_1\geqslant f_2\geqslant f_3\geqslant\cdots$ 是一列单调减少的（非负）可积函数，并且点态收敛于 0，则

$$\lim_n I(f_n)=0.$$

表达"完备性"的第二种形式，简略地说：Lebesgue 把积分扩张到最大的函数类中去，并且这一扩张是合理的。

(iv) Lebesgue 可积函数空间是复值函数空间中最大的一个子空间，使得积分可以扩张到这一空间中去，并且保持线性、正和弱连续性。

严格地说，Lebesgue 并没有把完备性赋予(iv)中所描述的那种形式，他是用测度（长度，面积，体积，等等）这个术语来表达完备性的。如果我们在开始的时候只考虑面积，那么我们的语言将会简单些，而同样的办法可以应用于 R^k 中的（k 维）测度。

在这一方法中，面积是和 R^2 上可积函数相联系的。若 E 是 R^2 的一个子集，又若 k_E 是 E 的特征函数

$$k_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\notin E,\end{cases} \tag{7.1}$$

那么 E 的面积就是它的特征函数的积分

$$A(E)=\int k_E.$$

如果 k_E 是可积的(在 Lebesgue 意义下)，那么这一面积的"定义"是有意义的。Lebesgue 集中考察了面积函数的性质，这些都和已经引用过的积分算子的性质相仿。面积是可加的，

$$A(D\cup E)=A(D)+A(E),\ 若\ D\cap E=\emptyset.$$

又是正的，

$$A(E)\geqslant 0,$$

并且是**弱连续**的：

若 $E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots$ 和 $\bigcap_n E_n=\emptyset$，则 $\lim_n A(E_n)=0$。

有两个途径可以将面积的弱连续性加以改进。第一种改进是采用古希腊的"耗尽的方法"：若 $S_1\subset S_2\subset S_3\subset\cdots$ 是一列增加的集合，它们"耗尽"集 S 的点，即

$$S=\bigcup_n S_n,$$

则 $A(S)=\lim_n A(S_n)$。它和弱连续性的关系是这样的：设 $E_n=S-S_n$，那么它是一列减少的序列并且其交集为空的当且仅当 S_n 是一列增加的序列，其并集是 S。此外，若面积是可加的，我们有 $A(S_n)+A(S-S_n)=A(S)$，所以，$A(E_n)$ 趋于 0 当且仅当 $A(S_n)$ 趋于 $A(S)$。第二种改进是，若 S 是一列增加的序列 $\{S_n\}$ 的并，我们定义 $T_1=S_1$，$T_n=S_n-S_{n-1}$，$n\geqslant 2$，我们有

(7.2) $$S=\bigcup_n T_n,\quad T_i\cap T_j=\emptyset,\ i\neq j.$$

面积的可加性表明 $A(S_n)=A(T_1)+\cdots+A(T_n)$；于是 $A(S_n)$ 趋于 $A(S)$ 当且仅当

(7.3) $$A(S)=\sum_n A(T_n).$$

这一弱连续性的改进，指(7.3)，它是由(7.2)获得的，称为面积的**可列可加性**。这或许是最方便的形式，因为它包含着可加性作为

它的特殊情形。

自然，我们并没有给出究竟哪一种集类其面积函数是可以被应用的。如果平面上任何一个子集在某种意义下都具有面积（测度），那么我们当然倾向于运用面积的概念而不是去做"积分"。然而却存在相当多的平面的子集，利用选取公理(见附录）就知道没有适当的测度使得它们具有面积。也就是说，存在着这样的集，它们是"不可测"的。这种集是如此令人讨厌，以致于我们有理由采取这样一种态度，那就是我们只讨论一些简单的集的面积。但在古希腊的时候，看来就已经和这样一个问题的回答发生瓜葛；从简单的集出发，怎样的集类能够为它定义一种拓广的面积？Lebesgue 在发展他的积分的过程中，曾经证明过的那些事实给我们所有的人留下了深刻的印象。

(v) 由平面上的一些有界子集所组成的最大的集类，其中每一个集都具有拓广的面积，并且这种面积仍旧是正的和可列可加的，那么这一集类必定是由这样的有界集所组成的：每一个有界集的特征函数是 Lebesgue 可积的。此外，对每一个这样的集，其面积就是特征函数的积分。

我们要强调的是，在(iv)和(v)中用话来表达"完备性"总显得不那么严密，它们传达了正确的想法，但在它们能够给予严格的数学表达之前，还有不少技术性的问题必须加以解释，但我们现在就停下来干这件事是不必要的，也是没有好处的。

如果说 (iii)—(v) 表达了 Lebesgue 积分的一个特殊的完备性性质，那么它们却没有适当的给出究竟其意义是什么，对此我们将给予某些说明。

积分的完备性理论的发展，成为数学分析学者掌握的新的有力工具，不出几年，就发展到研究复解析函数中去，有了完备定理才有可能去研究 Fourier 级数和 Fourier 变换。Lebesgue 的方

法还有利于推广，其中所出现的一些其他"测度"只是用来代替长度，面积，体积等等。如果没有这样的发展，现代概率论将不可能建立。所有这些不仅影响到数学本身的结构，也影响到它的应用领域。让我们用一些可捉摸的例子来看一看这个更一般的积分所提供的工具和结论，并以此结束这一节介绍性的叙述。

关于积分一个再次出现的问题是在怎样的情形下"极限（函数）的积分等于积分的极限"。换句话说，若 f_1，f_2，…是定义在某个长方体上的一列可积函数，又若

$$f(x)=\lim_n f_n(x),$$

在什么条件下我们可以断言 f 可积并且

$$\int f=\lim_n \int f_n?$$

如果每个 f_n 是连续的并且收敛是一致的，那么上述论断是没有问题的；但它却远离许多问题所须要的一个适当的回答。例如，当 f_n 连续而 f 不连续时，收敛就不是一致的。为了将 Riemann 积分和 Lebesgue 积分在这个问题上作一个对比，让我们列出下面性质：

(a) 每个 f_n 是可积的。

(b) 序列 $\{f_n\}$ 有界。

(c) $\{f_n\}$ 点态收敛于 f。

(d) f 是可积的。

(e) $\int f=\lim_n \int f_n$。

在 R^n 内一个长方体上关于 Riemann 积分的一个最强的定理是：

$$(a)+(b)+(c)+(d)\Longrightarrow(e).$$

但对于 Lebesgue 积分，能够将(d)从假设移到结论中去：

$$(a)+(b)+(c)\Longrightarrow(d)+(e).$$

于是，对于长方体上的 Lebesgue 积分，有界和点态收敛允许我们交换极限的次序，这是一个非常有用的技巧。

(vi) 若$\{f_n\}$是R^k内某个长方体上有界的Lebesgue可积函数序列，点态收敛于函数f，则f是Lebesgue可积的并且

$$\int f=\lim_n\int f_n.$$

与此相平行的，正好可以给出处理无界函数的一个同样有用的方法。

(vii) 若$f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots$是一列增加的(实值)Lebesgue 可积函数，并且积分序列$\int f_n$是有上界的，那么可以获得在"几乎所有"的点x上，极限

$$f(x)=\lim_n f_n(x)$$

存在，并且f是一个Lebesgue可积函数，以及

$$\int f=\lim_n\int f_n.$$

(我们将在7.3节中定义"几乎处处"。)

(vi)和(vii)非常接近于完备性性质(iii)—(v)，它们能够给出下述形式的完备性理论。

在第5章里我们曾经给出，若f是区间$[-\pi,\pi]$上的一个复值分段连续函数，又若

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$$

是f的Fourier级数，其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx, \tag{7.4}$$

则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2, \tag{7.5}$$

以及(必然有)部分和

$$s_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{inx},$$

在"平方积分"范数下收敛于 f，即

$$\|f - s_N\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_N(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

趋于 0. Lebesgue 积分为下述漂亮的逆命题作了准备：若 $\{c_n\}$ 是任意一个复数序列，使得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty,$$

那么存在一个 $[-\pi, \pi]$ 上的复值函数 f，使得 f 和 f^2 都是 Lebesgue 可积的，并且 $\{c_n\}$ 是 f 的 Fourier 系数。它给出了 L^2（所有在 $[-\pi, \pi]$ 上 Lebesgue 平方可积函数组成的空间）和 l^2（所有平方可和的复数序列空间）之间的一个完全的对应。如果我们把在几乎处处都取 0 值的函数看成是零函数，那么这一对应是 1:1 的，并且它保持范数(7.5)。

读者也许喜欢在自己的心中保留这些少量的例子作为我们为什么要发展 Lebesgue 积分的理由。我们将利用(iii)来引导我们如何去发展它。

7.2 起　点

在这一节中我们将给出严格的叙述，并由此作为起点去发展 Lebesgue 积分。首先我们复习一下关于连续函数的（Riemann）积分的必要信息。我们将对第 4 章的内容作少许修改，这是为了能够直接研究（整个）R^n 上的积分以代替长方体上的积分。

定义　对 R^n 上的复值函数 f，如果存在一个紧集 K 使得对每一个不在 K 内的 x 有 $f(x)=0$，就称 f 有**紧支柱**。

注意，两个有紧支柱的函数之和仍旧是一个有紧支柱的函数：若 f_1 在 K_1 外为 0，f_2 在 K_2 外为 0，则 f_1+f_2 在 $K_1 \cup K_2$ 外为 0. 因此，所有具有紧支柱的函数组成的集是 R^n 上所有（复）函数组成的空间的一个线性子空间。

记号 我们记$C_c(R^n)$是R^n上一切有紧支柱的连续复值函数组成的集合，显然，它也是R^n上所有函数组成的空间的一个线性子空间。

要定义在R^n上具有紧支柱的连续函数的 Riemann 积分，我们需要下面的简单结果。

引理 设B是R^n内的一个闭长方体，$\tilde{B}$是一个包含B的闭长方体。又设f是$\tilde{B}$上的连续函数，并且在$\tilde{B}-B$上$f=0$，则

$$\int_{\tilde{B}} f=\int_B f.$$

证明 我们用和数

$$S(f,\ P,\ T)=\sum_{j=1}^{n} f(t_j)m(B_j),$$

逼近f在B上的积分，其中$P=\{B_1,\ B_2,\ \cdots,B_n\}$是$B$的一个划分，$T=\{t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n\}$是点$t_j\in B_j$的一种选取。给定任何$P$，我们可以得到$\tilde{B}$的一个划分$\tilde{P}$使得

(a) $P\subset\tilde{P}$，即每个长方体B_j是$\tilde{P}$的长方体中的一个。

(b) $\|\tilde{P}\|\leqslant\|P\|$。

给定一种"选取"T，将它扩张为$\tilde{P}$内点的一种"选取"$\tilde{T}$，由条件，如果某个$\tilde{P}$内的长方体不是P内的长方体，那么在此长方体中选取的点不在B内，于是，因为在$\tilde{B}-B$上$f=0$，所以

$$S(f,\ \tilde{P},\ \tilde{T})=S(f,\ P,\ T).$$

若网眼$\|P\|$(从而网眼$\|\tilde{P}\|$)很小，那么$S(f,\ P,\ T)$将接近$\int_B f$以及$S\ (f,\ \tilde{P},\ \tilde{T})$将接近$\int_{\tilde{B}} f$。这就建立了引理。

定义 若f是一个R^n上有紧支柱的连续函数，则定义f在R^n上的 Riemann 积分为

$$\int f=\int_B f,$$

其中B是任何闭长方体，使得在B外$f=0$。

自然，要指出的是，只要在B外$f=0$，那么$\int_B f$就与B无关。换句话说，若B_1和B_2都是闭长方体，在B_1外或B_2外$f=0$，那么

$$\int_{B_1} f=\int_{B_2} f.$$

这从刚才的引理立即可得，因为它告诉我们

$$\int_{B_1} f=\int_{B_1\cap B_2} f,$$

$$\int_{B_2} f=\int_{B_1\cap B_2} f.$$

定理 1 $C_0(R^k)$的 Riemann 积分有以下性质

(i) 它是线性的，

$$\int(cf+g)=c\int f+\int g.$$

(ii) 它是正的；即若$f\geqslant 0$，则

$$\int f\geqslant 0.$$

(iii) 它是弱连续的；即若$f_1\geqslant f_2\geqslant f_3\geqslant\cdots$是$C_0(R^k)$内一列单调减少的非负函数序列，并且点态收敛于0，则

$$\lim_n\int f_n=0.$$

证明 只有(iii)不是显然的，为了证明它，选取一个闭长方体B，使得在B外$f_1=0$。因为$0\leqslant f_n\leqslant f_1$，我们看到在$B$外$f_n=0$。按照上面所说，

$$\int f_n=\int_B f_n,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

因为(a)每个f_n连续，(b)$\{f_n\}$单调减少趋于0，以及(c)B是紧的，Dini 定理，(第5章定理1)告诉我们$\{f_n\}$在B上一致收敛于

0，于是

$$\lim_n \int_E f_n = 0.$$

现在我们能够说明我们在下面想要做的是什么。我们考虑由$C_c(R^n)$组成的赋范线性空间，带有范数

$$\|f\|_1 = \int |f|, \tag{7.6}$$

这一范数称为$C_c(R^n)$上的L^1–范数。

我们打算将赋范线性空间$(C_c, \|\cdots\|_1)$完备起来，使它成为一个 Banach 空间。因为积分在$C_c(R^n)$上是一致连续的：

$$\left|\int f - \int g\right| \leqslant \int |f-g| = \|f-g\|_1,$$

它将唯一的扩张为那个完备化空间上的一个(线性)函数。本质上说，这个完备化的空间将是 Lebesgue 可积函数组成的空间，$\int$的扩张将成为这个空间上的积分。

在第6章中，我们已经知道如何将任何给定的赋范线性空间完备化，使它成为一个 Banach 空间。但我们不必利用这个一般的结果，然而我们却要记住它的证明方法，由此得出我们应该去做什么。完备化过程的基本思想很简单：对赋范线性空间的每个 Cauchy 序列，与它相联系的，我们给出一个抽象的向量，把它看成这一序列的极限，并按照条件，当两个 Cauchy 序列之差收敛于0时，它们将有同一个"抽象"的极限向量。于是，在我们手中的实例是，对$C_c(R^n)$中L^1–范数下的每一个 Cauchy 序列：

$$\lim_{n,p} \|f_n - f_p\|_1 = 0, \tag{7.7}$$

我们给它一个极限，但要求此极限比一个抽象向量有更多的具体内容。我们要求它是R^n上的一个函数。因此，我们曾经希望L^1–Cauchy 条件(7.5)能够获得序列$\{f_n\}$点态收敛。但不幸的是，这

并不常常成立。能够成立的是若 $\{f_n\}$ 是一个快速 L^1–Cauchy 序列：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n-f_{n+1}\|<\infty,$$

则 $\{f_n\}$ 在 R^k 内"几乎处处"点态收敛。于是，我们得到一个函数，用它来作为 Cauchy 序列的极限。由这种方式产生的函数将是 R^k 上的 Lebesgue 可积函数。也就是，R^k 上的一个 Lebesgue 可积函数将是一个在 R^k 上"几乎处处"有定义的(复值)函数，使得在 $C_c(R^k)$ 内存在一个快速 L^1–Cauchy 序列"几乎处处"点态收敛于这一函数。它的积分将(自然)是 Cauchy 序列函数的积分之极限。要把上述想法表达出来并证实其正确性，还需作一些努力。

习　题

1. 设 I 是实直线上的一个闭(有界)区间，J 是一个包含 I 的开区间。构造一个 R^1 上的连续函数 f，使得在 I 上 $f=1$，在 J 外 $f=0$，并且在 $J-I$ 上 $0<f<1$。

2. 设 K 是 R^k 的一个紧子集，U 是包含 K 的一个有界开集。令 $g(x)=d(x,\ R^k-U)$，设 I 是闭区间 $[a,\ b]$，其中

$$a=\inf_{K} g$$

$$b=\sup_{K}\ g.$$

对习题 1 中所构造的函数 f，证明复合 $h=f\circ g$ 满足：

(i) $h\in C_c(R^k)$，

(ii) 在 K 上 $h=1$，

(iii) 在 U 外 $h=0$，

(iv) 在 $U-K$ 上 $0<h<1$。

3. 设 f 是 R^k 上的连续函数，例如多项式，K 是 R^k 的任一紧子集，利用习题 2 的结果证明存在 R^k 上的一个连续函数，它有紧支柱，并且在 K 上与 f 相等。

4. 设 f 是 $C_c(R^k)$ 内一个函数。证明 f 的实部和虚部都在 $C_c(R^k)$

内，如同 $|f|$ 一样。

5. 证明 L^1-范数是 $C_c(R^k)$ 上的一个范数。

6. K 和 U 如习题 2 中所设，又设 h 是习题 2 中所构造的，则 $h\geqslant h^2\geqslant h^3\geqslant\cdots$ 是 $C_c(R^k)$ 内单调减少的函数序列，它是否一致收敛？你将把

$$\lim\int h^n$$

称作什么？

7. 若 f 是 R^k 上的复值函数，f 的支柱是 $\{x; f(x)\neq 0\}$ 的闭包。

(a) 证明每个函数有紧支柱当且仅当它的支柱是紧的。

(b) 若 f 有紧支柱，证明 f 的支柱是使得在 K 外 $f=0$ 的最小的紧集 K。

8. 每一个 $C_c(R^k)$ 的函数是有界的，证明上确界范数是 $C_c(R^k)$ 的一个范数。

9. 赋范线性空间 $(C_c, \|\cdots\|_\infty)$ 完备吗？如果不，叙述其完备化(如同 R^k 上有界连续函数的子空间)。

*10. 若 K 是 R^k 的一个紧子集，f 是 K 上一个复值连续函数，则存在 $g\in C_c(R^k)$ 使得 $g(x)=f(x)$，$x\in K$。

7.3 零测度集

我们曾经好几次引用了"几乎处处"收敛的概念，并且还指明这一概念在讨论 Lebesgue 可积函数时是必不可少的。在本节中，我们将利用"零测度集"给"几乎处处"一个确切的表达。如果我们讨论更一般的"外测度"的概念，我们就会获得某种技术上的好处，然后对 Riemann 积分给出它和"零测度"的关系。

定义 若 S 是 R^k 的一个子集，S 的**外测度**是

$$m^*(S)=\inf_{\{B_n\}}\sum_{n=1}^{\infty}m(B_n), \tag{7.8}$$

其中 $\{B_n\}$ 是覆盖 S 的可列个长方体，而下确界是对所有这种 $\{B_n\}$ 而取的。

解释如下：给定集 S，存在各种各样的长方体的序列 B_1，B_2，

B_3, …覆盖 S：

$$S\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n.$$

例如所有具有有理顶点的长方体的全体就是这种覆盖，这告诉我们$0\leqslant m^*(S)\leqslant\infty$。但这并不是能够诱导出外测度定义的那种可数覆盖。我们宁可记住下面的那种很少的长方体的序列，使得

(i)　B_1, B_2, B_3, …刚好覆盖 S。

(ii)　这些长方体 B_i 存在最小的重迭部分。

对这样的序列$\{B_n\}$，和数 $\sum_n m(B_n)$ 应该恰好只比我们希望称之为 S 的测度(k 维体积)大一点点。当我们利用越来越小的长方体时，我们就可以改进(i)和(ii)，使和数越来越接近 S 的"测度"。我们希望获得作为极限的最小数，它就是下确界，并称它为 S 的外测度 $m^*(S)$。我们宁愿称它是 S 的外测度而不称它是 S 的"测度"是由于两个理由。第一，我们得到它是从 S 的外面挤向 S 的。第二，在 7.1 节中我们曾经指出对 R^k 的所有子集并不是都可以赋以测度，使得我们所期望的有关测度的性质能够保持下来，即，存在"不可测"集。

对多数人来说，最自然的方式是利用长方体的有限覆盖来定义外测度。存在着一种具有"自然"吸引力的系统方法：我们用给定的"网眼"所组成的网格将 R^k 划分成许多立方体。为了建立给定的集 S 的外测度，我们作出所有包含 S 中的点的那些立方体的体积之和。(图27)。再把网格越分越细，我们所得到的一列和数将单调减少收敛于 S 的测度(外测度)。显然，对无界集，这就包含着由无限多个立方体组成的覆盖，但对有界集，不论在怎样的网格下，只有有限个立方体接触到 S。对每一个"良好"的集，这一过程是恰当的，但正如 Lebesgue 所了解的那样，对相当多的(有界)集这是不适当的。我们为了获得有关积分的一个适当的理论就必须

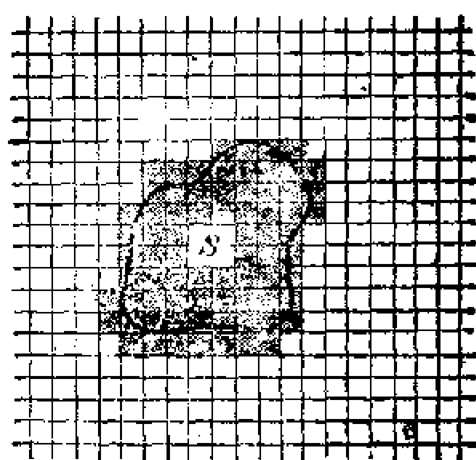


图 27

讨论这些集。(见例 1)

引理 若 S, S_1, S_2, S_3, …都是 R^k 的子集,使得

$$S\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n,$$

则

$$m^*(S)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*(S_n). \tag{7.9}$$

证明 若对某个 n, $m^*(S_n)=\infty$, 不等式显然成立。若对一切 n, $m^*(S_n)<\infty$, 我们证明如下,对 $\varepsilon>0$, 由 $m^*(S_1)$的定义,存在长方体的一个序列 $\{B_n^1\}$, 它覆盖 S_1 并且满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}m(B_n^1)<m^*(S_1)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

同样,存在长方体的序列 $\{B_n^2\}$ 覆盖 S_2, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}m\{B_n^2\}<m^*(S_2)+\frac{\varepsilon}{4}.$$

一般地,(对每个 $k=1, 2, 3, \cdots$)我们可以找到长方体的序列 $\{B_n^k\}$, 它覆盖 S_k, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}m(B_n^k)<m^*(S_k)+\frac{\varepsilon}{2^k};$$

因为集序列 $B_1^k, B_2^k, B_3^k, \cdots$ 覆盖 S_k 以及序列 $\{S_k\}$ 覆盖 S，所以二重序列 $\{B_n^k; k=1, 2, 3, \cdots, n=1, 2, 3, \cdots\}$ 是 S 的一个可列个长方体组成的覆盖。并且，

$$\begin{aligned}\sum_{k,n} m(B_n^k) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m(B_n^k)\\ &<\sum_{k=1}^{\infty}\left[m^*(S_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}\right]\\ &=\sum_{k=1}^{\infty}m^*(S_k)+\varepsilon,\end{aligned}$$

于是

$$m^*(S)<\sum_{k=1}^{\infty}m^*(S_k)+\varepsilon. \tag{7.10}$$

由于(7.10)对每一个 $\varepsilon>0$ 存立，引理便获得证明。

引理包含着一个特殊的(平凡的)情形，当 $S\subset T$ 时有 $m^*(S)\leqslant m^*(T)$，这只要取 $S_n=\varnothing$，$n\geqslant 2$ 就可以了。引理还包含着这样一个推论，对任何集 S 和 T，我们有

$$m^*(S\cup T)\leqslant m^*(S)+m^*(T). \tag{7.11}$$

当 $S\cap T=\varnothing$ 时，(7.11)中的等式并不一定成立，这是因为外测度不是 R^n 的所有子集所组成的类上的可加函数。现在，我们不去证明这一断言，因为它包含着如何作出"不可测"集的例子。

让我们立即指出，闭集、开集以及由它们所生成的任何集都是"可测"的，并且它们的 m^* 都逼近其测度，这后一论断是不容易证明的，即使对一个最简单的集也是如此。例如，设 B 是 R^n 内的一个长方体，显然它有一个很好的结果

$$m^*(B)=m(B).$$

但是，我们如何证明这是正确的呢？这将在习题中得到启发。

我们要利用 Riemann 积分和外测度之间的下列简单关系。

引理 设 f 是 R^n 上一个非负连续函数，它有紧支柱。那么对每个 $c>0$，有

(7.12) $$\int f \geqslant cm^*(\{x; f(x)\geqslant c\}).$$

证明 设 $c>0$, $S_c=\{x; f(x)\geqslant c\}$. 又设 B 是任意一个闭长方体,使得在 B 外 $f=0$。令 $P=\{B_1, \cdots, B_N\}$ 是 B 的一个划分。我们将证明存在关于点 $t_j\in B_j$ 的一种选取 T, 使得 $S(f, P, T)\geqslant cm^*(S_c)$。我们选取点 $t_1, \cdots, t_N$ 如下,若 $B_j\cap S_c\neq\phi$, 选取某个 $t_j\in B_j\cap S_c$。若 $B_j\cap S_c=\emptyset$, 选取 t_j 是 B_j 内任意一点。因为 $f\geqslant 0$, 故

(7.13) $$S(f, P, T)\geqslant \sum_{S_c\cap B_j\neq\phi} f(t_j)m(B_j)$$

$$\geqslant c\sum_{S_c\cap B_j\neq\phi} m(B_j).$$

因为 $c>0$ 以及在 B 外 $f=0$, 所以集 S_c 含在 B 内。于是,使得 $S_c\cap B_j\neq\emptyset$ 的那些长方体 B_j 是 S_c 的一个(有限)覆盖,并且

$$m^*(S_c)\leqslant\sum_{S_c\cap B_j\neq\phi} m(B_j).$$

将它和(7.13)联合起来我们得 $S(f, P, T)\geqslant cm^*(S_c)$.

定义 R^n 的一个子集 S, 如果 $m^*(S)=0$, 就称 S 是一个**零测度集**.

要注意的是零测度集的任一子集都是零测度集。现在我们把它稍微推广一下。

引理 对一个集 S, 下列条件等价:

(i) S 是一个零测度集.

(ii) S 是一列零测度集之并集.

(iii) 对任意 $\varepsilon>0$, 存在一列集 S_1, S_2, …使得

$$S\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n,$$

(7.14) $$\sum_{n=1}^{\infty}m^*(S_n)<\varepsilon.$$

证明 (i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longrightarrow$(iii)是明显的。若(iii)满足,那么由

不等式(7.9)：

$$m^*(S) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(S_n),$$

于是对任意 $\varepsilon>0$，$m^*(S)<\varepsilon$。故 S 是一个零测度集。

例 1 由单个的点组成的集是零测度集。事实上，还可以证明 R^n 内任何可列子集是零测度集。证明如下，设 S 是一个可列集，又设 x_1，x_2，x_3，…是 S 的可列个点。令 $\varepsilon>0$，对每个 n，取一个长方体 B_n 使得

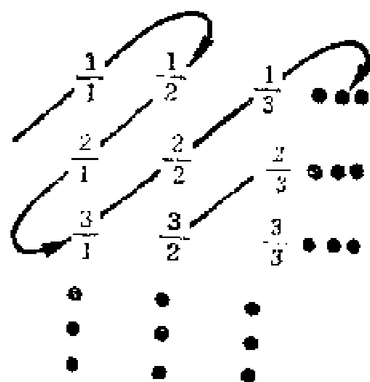
$$x_n \in B_n,$$

$$m(B_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

那么序列 $\{B_n\}$ 覆盖 S，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) < \varepsilon.$$

于是 $m^*(S)<\varepsilon$，其中 $\varepsilon>0$ 是预先任意给定的。作为这个例子的一个特殊情形，我们看到 R^n 内具有有理坐标的点所组成的点集是一个零测度集。特别是，实直线上的有理数组成一个零测度集。每一个学过分析学的学生都很了解它的证明，其中一个证明是对正的有理数可以论证如下，用某种方法将这些数(点)排列起来，例如，按照图式



将正有理数排列起来。假设我们有一个长度为 $\varepsilon>0$ 的区间，

将此区间等分为两半并将其中的一半覆盖第一个有理点. 再把剩下来的一半等分为两半，把其中的一半(也就是最初区间的四分之一)覆盖第二个有理点，继续等分，再把其中的一半覆盖第三个有理点，等等，这一过程可以无限制的进行下去，得到一列区间覆盖着正有理点，而这些区间长度之和是ε，所以，我们得出由所有正有理点组成的集的“长度”为0. 要注意的是，如果我们用任意有限个区间来覆盖[0, 1]中的有理点，那么这些区间长度之和至少是1，这是因为有理点在[0, 1]稠密. 这表明，即使对一个有界集，我们要用无限的覆盖来定义外测度的原因.

我们必须采用可列覆盖而不采用有限覆盖来得出有理点集测度是零的这一事实，还联系着下面的事实，那就是我们必须利用Lebesgue过程而不是利用Riemann过程来积分函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{是无理数},\\ 0, & x \text{是有理数}.\end{cases}$$

回忆一下(第4章例4)函数f在[0, 1]上不是Riemann可积的. 但它是(或者说，将是)Lebesgue可积的，并且我们将有

$$\int_0^1 f(x)dx=1.$$

这是因为除掉一个零测度集，$f(x)=1$，而一个零测度集在Lebesgue观点下是可以忽略不计的.

例2 Cantor集(第2章例15)是R^1中的一个不可列的零测度集. 这个集K是从单位闭区间中除去一列开区间I_1, I_2, I_3, …以后得到的，而$\sum_n m(I_n)=1$，看来有理由认为$m^*(K)=0$，这是因为在[0, 1]中将K除去之后的长度正好是1. 事实上，这是不难严格叙述的，当我们在[0, 1]中除去开区间I_1, I_2, …, I_n以后，剩下来的是有限个互不重叠的区间之和(例如参见第68页图5)，这些剩下来的区间覆盖着K，其长度之和是

$$1-\sum_{j=1}^{n} m(I_j),$$

当 n 增加时它趋于 0。

现在，我们考虑第一个非平凡的结果。

定理 2 R^k 中的子集 S 是一个零测度集当且仅当存在一个序列 $\{f_n\}$ 使得

(i) 每一个 f_n 是 R^k 上的具有紧支柱的实值连续函数。

(ii) $f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant \cdots$。

(iii) 积分序列 $\int f_n$ 有界。

(iv) 对每一点 $x \in S$, $\lim\limits_{n} f_n(x)=\infty$。

证明 设我们已经给出一个具有性质(i)—(iv)的序列 $\{f_n\}$。由(ii)和(iii)，积分序列 $\left\{\int f_n\right\}$ 是单调增加并且有上界，于是它收敛。现在，我们用 $\{f_n\}$ 的一个子序列代替 $\{f_n\}$，设 $g_j=f_{n_j}$，其中 $n_1<n_2<n_3<\cdots$ 并且

$$\int f_{n_j}>\lim_{n}\int f_n-4^{-j},$$

那么序列 $\{g_n\}$ 也满足(i)—(iv)并且

$$\int(g_{n+1}-g_n)<4^{-n},\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

令 $\varepsilon>0$，我们将证明 $m^*(S)<\varepsilon$。设

$$E_n=\left\{x;\ g_{n+1}(x)-g_n(x)>\frac{1}{\varepsilon 2^n}\right\}.$$

那么(iv)告诉我们

$$S\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n.$$

为什么呢？这是因为，如果对一切 n，$x\notin E_n$，我们就有

$$g_{n+1}(x)-g_n(x)\leqslant\frac{1}{\varepsilon 2^n},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

于是对每个 n,

$$g_n(x)=g_1(x)+[g_2(x)-g_1(x)]+\cdots+[g_n(x)-g_{n-1}(x)]$$
$$\leqslant g_1(x)+\sum_{j=1}^{\infty}[g_{j+1}(x)-g_j(x)]$$
$$\leqslant g_1(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon 2^j}$$
$$=g_1(x)+\frac{1}{\varepsilon}.$$

因此 $\lim_n g_n(x)<\infty$。

由于 $\int(g_{n+1}-g_n)<4^{-n}$, 不等式(7.12)告诉我们

$$\frac{1}{\varepsilon 2^n}m^*(E_n)\leqslant 4^{-n},$$
$$m^*(E)\leqslant\varepsilon 2^{-n}.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}m^*(E_n)\leqslant\varepsilon. \tag{7.15}$$

再由(7.9)和(7.15)得 $m^*(S)\leqslant\varepsilon$。

现在假设 $m^*(S)=0$。我们将构造出函数 f_n，使它满足(i)—(iv)。对每个 j，存在一列长方体 $\{B_n^j\}$ 使得

$$S\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n^j,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}m(B_n^j)<2^{-j}.$$

对每一对 (j,n)，选取一个非负函数 $f_{jn}\in C_c(R^k)$ 使得在 B_n^j 上 $f_{jn}\geqslant 1$ 并且 $\int f_{jn}\leqslant 2m(B_n^j)$ (很容易证明这种函数是存在的，我们把它留作习题)，那么，我们企图构造的函数是

$$f_p=\sum_{r=1}^{p}\sum_{j+n=r}f_{jn}.$$

很明显，$f_p\in C_c(R^k)$，并且因为每个 f_{jn} 是非负的，所以 $f_1\leqslant f_2$

$\leqslant f_3 \leqslant \cdots$，对于条件(iii)，我们有

$$\int f_p = \sum_{r=1}^{p} \sum_{j+n=r} f_{jn}$$

$$\leqslant \sum_{j,n} \int f_{jn} \leqslant 2\sum_{j,n} m(B_n^j)$$

$$\leqslant 2\sum_j 2^{-j} = 2.$$

此外，因为在 B_n^j 上 $f_{jn} \geqslant 1$，则当 $x \in B_n^j$ 时，$f_p(x)$ 的值至少大于适合 $j+n \leqslant p$ 的那种数对 (j, n) 的个数。如果 $x \in S$，那么对每个 j，存在 n 使得 $x \in B_n^j$。这就是说，若 $x \in S$，则有无限多个数对 (j, n) 使得 $x \in B_n^j$；于是

$$\lim_p f_p(x) = \infty.$$

定义 任一(和 R^n 中的点相联系的)现象，如果除去一个零测度集，它一定发生，就称它是**几乎处处**发生，(常常缩写为 a.e.) 或称为对**几乎所有的**点发生。

上面的定理表明，若 $f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant \cdots$ 是 $C_c(R^n)$ 内一列单调增加的(实值)函数，使得积分 $\int f_n$ 有界，那么极限 $\lim_n f_n(x)$ 是几乎处处有限的，即

$$\lim_n f_n(x) < \infty, \text{ a.e.}$$

利用"几乎处处"这一术语的另一个例子是考虑 R^1 上的函数，其定义为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \text{ 是无理数或 } x = 0, \\ \dfrac{1}{q}, & \text{若 } x = \dfrac{p}{q}, \text{ 是既约分数。} \end{cases}$$

我们将回忆得出 f 在 0 和每个无理点连续，于是 f 几乎处处连续。事实上，f 在每个非 0 的有理点不连续，而后一句话是无需证实了。R^1 上的每一个连续函数同时是几乎处处连续的。第三个例

子是考虑 Cantor 函数(第3章例24)，它是$[0, 1]$上的连续函数，它在不属于 Cantor 集K的每一点是可微的。因为K是一个零测度集，所以 Cantor 函数在$[0, 1]$上几乎处处可微。附带说一句，在后面我们将证明区间$[a, b]$上的复值函数是 Riemann 可积的当且仅当它是(a)有界的，(b)几乎处处连续。

习　　题

1．设B是R^n内的一个闭长方体。证明在$C_c(R^n)$内存在非负f使得在B上$f \geqslant 1$以及$\int f \leqslant 2m(B)$(提示：参考7.2节习题1.)。

2．设S是R^n的一个子集，则

$$m^*(S)=\inf\sum_k m(B_k),$$

其中下确界是对S的由可列个开长方体所组成的所有开覆盖而取的(提示：由开长方体所获得的下确界只能比$m^*(S)$大，若$\{B_k\}$是任何一个长方体的序列，我们可以将B_k长胖使它成为一个开长方体，而它所增加的测度不超过$\varepsilon 2^{-k}$.)。

3．设K是R^n的一个紧子集，则

$$m^*(K)=\inf\sum_{k=1}^{N} m(B_k),$$

其中下确界是对K的所有有限个长方体所组成的开覆盖而取的。

4．若B是一个闭长方体，则$m^*(B)=m(B)$。

5．若B是一个长方体，则其边界是一个外测度为0的集。

6．若B是一个长方体，则$m^*(B)=m(B)$。

7．若$B_1, \cdots, B_n$都是含在开集U内的长方体，又若其内部$B_1^\circ, \cdots, B_n^\circ$两两不相交，则

$$\sum_{j=1}^{n} m(B_j) \leqslant m^*(U).$$

(提示：这只要收缩一下，去证明$B_1, \cdots, B_n$都是两两不相交的闭长方体就可以了)。

8．设U是实直线R^1的开子集，则(可以想象得出)U是可列个互不相交的开区间之和：

$$U=\bigcup_k I_k,\ I_i\cap I_j=\varnothing,\ i\neq j.$$

并证明

$$m^*(U)=\sum_k m(I_k).$$

(可以假定U是有界的)。

9. 证明圆周 $S^1=\{(x,y);x^2+y^2=1\}$是一个(二维)测度为0的集。

10. 在 R^2 内寻找一个紧集 K，使得

(a) K的内部是空的；

(b) $m^*(K)>0$.

(提示：如同 Cantor 集那样构造 K，但取出较小的开区间)。

*11. 设 ψ 是 $C_c(R^k)$上的复值函数(算子)，具有以下性质。

(i) ψ 是线性的，$\psi(cf+g)=c\psi(f)+\psi(g)$。

(ii) 若B是闭长方体，并且在B外 $f=0$，则

$$|\psi(f)|\leqslant m(B)\|f\|_\infty.$$

(iii) 若 $f\in C_c(R^k)$是非负的，于是对每一个闭长方体 B,

$$\psi(f)\geqslant m(B)\inf_B f,$$

证明对每一个 $f\in C_c(R^k)$有

$$\psi(f)=\int f.$$

7.4 基本性质

我们现在的任务是：(i)给出$C_c(R^k)$中在L^1-范数下每一个(快速)Cauchy序列的极限(函数)，(ii)给出每一个这一极限函数的积分，(iii)证明这种积分在"可积"函数空间上是线性的，正的，等等。

定理3 若 $\{f_n\}$ 是一列有紧支柱的连续函数，并且是 L^1-范数下的快速 Cauchy 序列

(7.16) $$\sum_{n=1}^{\infty}\int|f_{n+1}-f_n|<\infty,$$

则$\{f_n\}$在 R^k 上几乎处处点态收敛。

证明 设

$$g_n=\sum_{j=1}^{n}|f_{j+1}-f_j|.$$

那么函数 g_n 满足定理 2 的条件(i)—(iv)，于是

$$\lim_n g_n(x) < \infty, \text{ a.e.}$$

这就是

$$(7.17) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| < \infty, \text{ a.e.}$$

对(7.17)成立的每一个点 x，$\{f_n(x)\}$ 是快速 Cauchy 复数序列，因此它收敛。

定义 R^k 上的 Lebesgue **可积函数**是一个这样的函数 f，使得

(i) f 是一个在 R^k 上几乎处处有定义的复值函数，

(ii) 在 $C_c(R^k)$ 内存在快速 L^1-Cauchy 序列 $\{f_n\}$ 使得

$$f(x) = \lim_n f_n(x), \text{ a.e.}$$

这恰好表明 $C_c(R^k)$ 内的每一个快速 L^1-Cauchy 序列 $\{f_n\}$ 几乎处处点态收敛于一个 Lebesgue 可积函数 f。我们希望定义

$$\int f = \lim_n \int f_n.$$

显然，序列 $\left\{\int f_n\right\}$ 是收敛的。这是因为它是一个快速 Cauchy 序列：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int f_{n+1} - \int f_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_{n+1} - f_n| < \infty.$$

然而，我们还必须证明极限

$$\lim_n \int f_n$$

仅仅依赖于极限函数 f，而与我们用来逼近 f 的特殊的序列 $\{f_n\}$ 无关，换句话说，我们必须证明若 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 都是 $C_c(R^k)$ 内的快速 L^1-Cauchy 序列使得

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n g_n(x), \text{ a.e.}$$

则

$$\lim_n \int f_n = \lim_n \int g_n,$$

这是问题的关键所在。

定理 4 设$\{f_n\}$和$\{g_n\}$是两个具有紧支柱的非负连续函数的单调增加序列，若

$$\lim_n f_n(x) \geqslant \lim_n g_n(x), \text{ a.e.}$$

则

$$\lim_n \int f_n \geqslant \lim_n \int g_n.$$

证明 设

$$f = \lim_n f_n$$

$$g = \lim_n g_n.$$

因为$f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant \cdots$和$g_1 \leqslant g_2 \leqslant g_3 \leqslant \cdots$，如果我们允许$+\infty$是一个数值的话，那么这两个极限在所有点处都存在。又因为$f(x) \geqslant g(x)$几乎处处成立，定理 2 告诉我们，在$C_c(R^k)$内存在一列非负函数，使得

(i) $h_1 \leqslant h_2 \leqslant h_3 \leqslant \cdots$,

(ii) 对每一个n，$\int h_n \leqslant 1$,

(iii) 若$f(x) < g(x)$，则$\lim_n h_n(x) = \infty$。

令$\varepsilon > 0$，条件(iii)告诉我们，对所有$x \in R^k$，有

$$\lim_n [f_n(x) + \varepsilon h_n(x)] \geqslant g(x). \tag{7.18}$$

现在，固定一个正整数p，因为$g \geqslant g_p$，对所有$x \in R^k$，我们有

$$\lim_n [f_n(x) + \varepsilon h_n(x)] \geqslant g_p(x). \tag{7.19}$$

令B_p是一个闭长方体使得在B_p外$g_p = 0$，函数序列

$$\varphi_n = \max(0, g_p - f_n - \varepsilon h_n)$$

单调减少收敛于 0。因为每一个φ_n是连续的而B_p是紧的，所以$\{\varphi_n\}$在B_p上一致收敛于 0，(Dini 定理，第 5 章定理 1)。于是对

某个 N，我们有

$$\varphi_N(x)\leqslant\frac{\varepsilon}{m(B_p)},\ x\in B_p.$$

这就是

$$f_N(x)+\varepsilon h_N(x)\geqslant g_p(x)-\frac{\varepsilon}{m(B_p)},\ x\in B_p.$$

由此便得到

$$\begin{aligned}\int f_N+\varepsilon&\geqslant\int f_N+\varepsilon\int h_N\\&\geqslant\int_{B_p}(f_N+\varepsilon h_N)\geqslant\int_{B_p}g_p-\varepsilon\\&=\int g_p-\varepsilon\end{aligned}$$

根据这一结果得

$$\lim_n\int f_n\geqslant\int g_p-2\varepsilon. \tag{7.20}$$

因为(7.20)对一切 p 和 ε 成立，我们有

$$\lim_n\int f_n\geqslant\lim_n\int g_n.$$

定理 5 设 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 是具有紧支柱的实连续函数的快速 L^1-Cauchy 序列．若

$$\lim_n f_n(x)\geqslant\lim_n g_n(x),\quad \text{a.e.}$$

则

$$\lim\int f_n\geqslant\lim\int g_n.$$

证明 定义 $f_0=g_0=0$，那么令

$$\alpha_n=\max(0,\ f_n-f_{n-1}-g_n+g_{n-1}),$$
$$\beta_n=\max(0,\ g_n-g_{n-1}-f_n+f_{n-1}),$$

则

$$\alpha_n-\beta_n=f_n-f_{n-1}-g_n+g_{n-1},$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j-\beta_j)=f_n-g_n.$$

序列

$$F_n=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j,$$

$$G_n=\sum_{j=1}^{n}\beta_j,$$

满足定理 4 的假设，于是

$$0\leqslant\lim_n\int(F_n-G_n)$$

$$=\lim_n\int\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j-\beta_j)=\lim_n\int(f_n-g_n).$$

系 若$\{f_n\}$和$\{g_n\}$都是$C_c(R^k)$内的快速 L^1-Cauchy 序列，使得

$$\lim_n f_n(x)=\lim_n g_n(x),\quad \text{a.e.}$$

则

$$\lim_n\int f_n=\lim_n\int g_n.$$

证明 将定理 5 分别应用于 f_n 和 g_n 的实部组成的序列和虚部组成的序列即得证明.

定义 若 f 是一个 Lebesgue 可积函数，f 的(Lebesgue)积分是

$$\int f=\lim_n\int f_n,$$

其中$\{f_n\}$是 $C_c(R^k)$中任意一个几乎处处点态收敛于 f 的快速L^1-Cauchy 序列。

当然，上面的系保证了这一积分是完全有意义的。现在，我们概括出积分和可积函数的一些基本性质。

定理 6 设 f 是在 R^k 上几乎处处有定义的复值函数。

(i) 若 f 是 Lebesgue 可积的，则对每一个复数 c 和每一个

Lebesgue 可积函数 g, $(cf+g)$ 也是 Lebesgue 可积的，并且

$$\int (cf+g) = c\int f + \int g.$$

(ii) 若 $u=\mathrm{Re}(f)$ 和 $v=\mathrm{Im}(f)$，也就是若 $f=u+iv$，其中 u 和 v 都是实值的。那么 f 是 Lebesgue 可积当且仅当 u 和 v 都是 Lebesgue 可积。

(iii) 若 f 是 Lebesgue 可积的，则 $|f|$ 也是 Lebesgue 可积的并且

$$\left|\int f\right| \leqslant \int |f|$$

(iv) 若 f 是 Lebesgue 可积的，并且几乎处处有 $f(x)\geqslant 0$，则

$$\int f \geqslant 0.$$

我们把这些论述的证明留给读者。

在这一节的最后我们要问自己，除去具有紧支柱的连续函数，我们还知道什么具体的 Lebesgue 可积函数的例子。

例 3 定理 2 给出一个最重要的方法，用它可从 $C_c(R^n)$ 中的函数"构造"出 Lebesgue 可积函数：若 $f_1\leqslant f_2\leqslant f_3\leqslant\cdots$ 是一列具有紧支柱的单调增加连续函数序列，并且其积分序列 $\left\{\int f_n\right\}$ 有界，那么

$$f(x)=\lim_n f_n(x)<\infty,\ \text{a.e.}$$

f 是一个 Lebesgue 可积函数，并且

$$\int f = \lim_n \int f_n.$$

当然，对减少的序列也同样成立。还有这样一个事实(我们将不停留下来证明它)，任何实值 Lebesgue 可积函数 f 都能够分解为 $f=f_1+f_2+f_3$，其中 f_1 是 $C_c(R^n)$ 中一个单调增加序列的极限，

f_2 是 $C_c(R^k)$ 中一个单调减少序列的极限，而 f_3 几乎处处为 0。对此，我们能够利用单调收敛的方法来获得这些事实。

设 K 是 R^k 内任一紧子集，存在一个函数 $h\in C_c(R^k)$ 使得

$$h=1,\ 在K上,\qquad 0\leqslant h<1,\ 在K外, \tag{7.21}$$

(见 7.2 节习题 2)，由幂所组成的序列 $h\geqslant h^2\geqslant h^3\geqslant\cdots$ 是减少的并且点态(每一点)收敛于 K 的特征函数：

$$\lim_n (h(x))^n = k_K(x) = \begin{cases}1, & x\in K,\\ 0, & x\notin K.\end{cases}$$

由单调收敛的性质，我们看到任何紧集的特征函数是 Lebesgue 可积的，(因为 $0\leqslant h^n\leqslant h$，所以其积分序列的有界性显然满足)。

从本质上说，我们能够证明一个更一般的论断，若 f 是 $C_c(R^k)$ 内任一函数，K 是任一紧子集，那么 f 在 K 上的限制函数

$$k_K f = \begin{cases}f, & 在K上,\\ 0, & 在K外,\end{cases}$$

是 Lebesgue 可积的。利用取实部和虚部并且将 $C_c(R^k)$ 中的实值函数写为非负函数之差，那么只须验证 $f\geqslant 0$ 时的结果就可以了。在这一情形下

$$k_K f = \lim_n h^n f,$$

这里 h 是一个满足(7.21)的函数；并且这一收敛是单调的。现在，若 g 是紧集 K 上的任何复值连续函数，那么在 $C_c(R^k)$ 内存在一个 f 使得 $f(x)=g(x)$，$x\in K$ (见 7.2 节习题 10)，于是，若 g 是紧集 K 上的任何连续函数，则函数

$$f=\begin{cases}g, & 在K上,\\ 0, & 在K外,\end{cases} \tag{7.22}$$

是 Lebesgue 可积的。当然，我们利用函数 h(7.21) 以及使 g 成为 $C_c(R^k)$ 内函数的任一种扩张，就知道如何去计算 f 的积分。

因为具有紧支柱的连续函数的积分是利用长方体上的 Riemann 积分来定义的，所以很明显，当 K 是一个闭长方体时，函数 f (7.22) 在 R^k 上的 Lebesgue 积分等于 g 在长方体 K 上的 Riemann 积分。由线性组合

$$g = g_1 K_{B_1} + \cdots + g_n K_{B_n},$$

我们看到当 g 是一个在某个长方体上的分块连续函数时，同样的结论也是成立的。若 g 是一个阶梯函数，即长方体的特征函数的线性组合

$$g = c_1 K_{B_1} + \cdots + c_n K_{B_n},$$

我们曾经在正文中给出了一个完整的证明。

我们也可以分析一下没有紧支柱的连续函数的可积性，设 f 是 R^k 上的一个连续复值函数，何时 f 是 Lebesgue 可积的呢？首先设 $f \geqslant 0$，我们来做一件明显的事情，选取一列增加的闭长方体序列 B_n，并且 R^k 中任一点都在某个 B_i 内：

$$\bigcup_n B_n = R^k,$$

考虑积分的单调序列

$$\int_{B_1} f \leqslant \int_{B_2} f \leqslant \cdots$$

为了仔细起见，我们假定 $\bar{B}_n$ 含在 B_{n+1} 的内部，$n = 1, 2, 3, \cdots$，如同 7.2 节习题 2 那样取 $h_n \in C_c(R^k)$。于是

$$h_n(x) = 1, \ x \in B_n,$$

$$0 < h_n(x) < 1, \ x \in B_{n+1}^\circ - B_n,$$

$$h_n(x) = 0, \ x \notin B_{n+1}^\circ,$$

则

$$h_1 f \leqslant h_2 f \leqslant h_3 f \leqslant \cdots$$

$$\lim_n h_n(x) f(x) = f(x), \text{ 对所有 } x,$$

$$\int_{B_n} f \leqslant \int h_n f \leqslant \int_{B_{n+1}} f.$$

于是，积分的序列$\left\{\int h_n f\right\}$有界当且仅当序列$\left\{\int_{B_n} f\right\}$有界.当它们有界时，非负函数$f$将是可积的。当$f$是复值时，这又能告诉我们什么呢?我们知道，若$f$可积，那么$|f|$也是可积的（为什么?我们刚刚叙述过），$|f|$在各个长方体$B_n$上的积分必为有界，记$f=u+iv$，其中$u$和$v$都是实值的。因为$|u|\leqslant|f|$和$|v|\leqslant|f|$，我们知道$|f|$可积时$|u|$和$|v|$也一定可积，此外，$u=u^+-u^-$，其中$u^+=\max(u,0)$，$u^-=-\min(u,0)$，它们都是连续的非负函数并且$|u|=u^++u^-$，因此，由我们刚才给出的非负函数的可积性，若$|u|$可积则$u^+$和$u^-$都可积，那么$u$可积。对$v$亦有同样的结论。我们得到(因$f$连续)$f$可积当且仅当$|f|$可积。所以，若$f$是$R^n$上的一个连续复值函数，则$f$是 Lebesgue 可积的当且仅当

$$\lim_n \int_{B_n} |f| < \infty,$$

这里$\{B_n\}$是任意一列增加的闭长方体的序列，而R^n中每一点必属于该序列中某个闭长方体。

习　　题

1. 若f和g都是 Lebesgue 可积函数，c是复数，则$(cf+g)$是一个 Lebesgue 可积函数，并且$\int(cf+g)=c\int f+\int g$.

2. 若f是 Lebesgue 可积函数，则其实部和虚部以及f的绝对值都是 Lebesgue 可积函数，并且$\left|\int f\right|\leqslant\int|f|$.

3. L^1-范数

$$\|f\|_1=\int|f|$$

是 Lebesgue 可积函数空间上的一个半范数。

4. 若f是一个 Lebesgue 可积函数，并且$\int|f|=0$，则$f(x)$几乎处处为0。

5. 若 f 是 R^n 上的函数，其值几乎处处为 0，则 f 是 Lebesgue 可积的并且 $\int f = 0$。

6. 若 f 是有紧支柱的连续函数，则 f 是 Lebesgue 可积的，并且 f 的 Lebesgue 积分等于 f 的 Riemann 积分。

7. 若 f 是 Lebesgue 可积函数，并且几乎处处有 $f(x) \geqslant 0$，则 $\int f \geqslant 0$。

8. 设 f 和 g 都是实值 Lebesgue 可积函数，又设

$$(f \vee g)(x) = \max(f(x),\ g(x)),$$
$$(f \wedge g)(x) = \min(f(x),\ g(x)),$$

则 $f \vee g$ 和 $f \wedge g$ 都是 Lebesgue 可积函数（提示：两个连续函数的最大值和最小值函数都是连续的）。

9. 证明函数

$$f(x) = e^{-|x|}$$

在实直线上 Lebesgue 可积，并求出它的积分。

10. 证明函数

$$f(x) = \frac{1}{x^2},\ x \neq 0,$$

在实直线上不是 Lebesgue 可积的，但函数

$$g(x) = \begin{cases} x^{-2}, & |x| \geqslant 1, \\ 0, & |x| < 1, \end{cases}$$

是 Lebesgue 可积的。用 $|x|^{-1/2}$ 代替 x^{-2} 将发生什么？

11. 函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < |x| \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

在 R^1 上不是 Lebesgue 可积的。定义在复数上的函数

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z}, & 0 < |z| \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

是 R^2 上的 Lebesgue 可积函数。

12. 每一个可积函数都几乎处处等于一个处处不连续的函数，这一命题正确吗？

7.5 完备性和连续性

我们已经将 $C_c(R^n)$ 的积分扩张到一个更大的空间上去，在这短短的一节里，我们首先（在 L^1- 范数下）将 $C_c(R^n)$ 完备化，做这件事是我们一贯的目的。然后我们将讨论可积性和连续性之间的关系。

记号 我们记 $L^1=L^1(R^n)$ 是 R^n 上（复值）Lebesgue 可积函数的空间

定理 7 在半-范数

$$\|f\|_1=\int|f|$$

下，$L^1(R^n)$ 是一个完备的半-范数线性空间，它含有 $C_c(R^n)$ 作为它的一个稠密的子空间。

证明 若 $f\in L^1$，那么在 $C_c(R^n)$ 内有一个快速 Cauchy 序列 $\{f_n\}$ 使得

$$\lim_n f_n(x)=f(x),\ \text{a.e.}$$

我们怎样知道 $\lim_n\|f-f_n\|_1=0$ 呢？固定一个正整数 p，那么 $\{|f_n-f_p|\}$ 是 $C_c(R^n)$ 内的一个快速 L^1-Cauchy 序列，它几乎处处点态收敛于 $|f-f_p|$。于是，

$$\begin{aligned}\|f-f_p\|_1&=\int|f-f_p|\\&=\lim_n\int|f_n-f_p|.\end{aligned}$$

但 $\{f_n\}$ 是 L^1 - Cauchy 序列；特别的

$$\lim_{n,p}\|f_n-f_p\|_1=0,$$

于是

$$\lim_p\|f-f_p\|_1=\lim_p\lim_n\|f_n-f_p\|_1=0.$$

我们要证明每一个关于 L^1-范数（更确切地说是关于 L^1-半范

数)的 Cauchy 序列在 L^1- 范数内收敛于一个可积函数，这只要证明每个快速 L^1-Cauchy 序列在 L^1 内收敛。若 $\{f_n\}$ 是这样一个序列：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_{n+1}-f_n\|_1<\infty,$$

我们能够选取(对每个 n) 一个函数 $g_n\in C_c(R^k)$ 使得

$$\|f_n-g_n\|_1<2^{-n},$$

则 $\{g_n\}$ 是 $C_c(R^k)$ 内的快速 L^1-Cauchy 序列。利用刚才已经证明的结果，存在 $f\in L^1$ 使得 $\lim\limits_n\|f-g_n\|_1=0$。那么，很明显，有 $\lim\|f-f_n\|_1=0$。

定义 如果一个复值函数满足

(a) 在 R^k 上几乎处处有定义，

(b) 其函数值在 R^k 上几乎处处为 0，

就称此函数是一个**零函数**。

在上一节的习题中已经指出，零函数 f 是 Lebesgue 可积函数，并且 $\int|f|=0$。于是，零函数集是 L^1 的一个子空间，它由 L^1-半范数为 0 的函数组成的。如同我们在第 6 章所说的那样，我们可以作出商空间 L^1/N，其中 N 是零函数空间。L^1/N 是一个Banach 空间，它含有一个稠密的线性子空间 $C_c(R^k)$。我们也可以这样来看：如果两个函数之差是一个零函数，就把它们看成是同一个函数。我们宁愿撇开上面的构造过程，按照习惯称 L^1 是一个Banach 空间(完备的赋范线性空间)。这就要采用下面的约定。

约定 设 f, g 是 L^1 中的两个函数，如果 $f(x)=g(x)$, a.e. 也就是说 $f-g$ 是一个零函数，那么我们就约定 $f=g$。

由这一约定得到当 $\|f\|_1=0$ 时就有 $f=0$。我们还要注意 $f\geq g$ 就是指 $f(x)\geq g(x)$ 几乎处处成立，等等。由于存在着误解

的可能，我们今后仍旧保留"几乎处处"这一术语。

现在，我们转过来注意这样的问题：当我们通过 $C_0(R^k)$ 获得 $L^1(R^k)$ 时，$L^1(R^k)$ 中的函数和连续性相差多少呢？怎样的不连续函数才是可积的呢？一个回答是，当然，一个可积函数可能处处不连续，这是因为对一个可积函数而言，不论我们用怎样的方式改变它在一个可列稠密集上的数值，总不会影响它的可积性（和其积分的数值）。另一方面，我们知道任何一个可积函数都可以用连续函数序列通过点态收敛的方式来逼近它。如果我们知道怎样去观察这一问题的话，那么这一逼近就有力地揭示了每一个可积函数都表现出多么意想不到的连续性。

定理 8 设 f 是 R^k 上的一个 Lebesgue 可积函数，若 ε 和 δ 是任意两个正数，那么存在一个集 S 和一个有紧支柱的连续函数 g，使得

$$m^*(S)<\delta,$$

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon,\ x\notin S \tag{7.23}$$

证明 这个证明和我们在前面曾经证明过的一个定理十分相似。我们先取 $C_0(R^k)$ 中的一个序列 $\{f_n\}$ 使得

$$\|f_{n+1}-f_n\|_1<\frac{1}{4^n},$$

$$\lim_n f_n(x)=f(x),\ \text{a.e.}$$

对每个 n，令

$$S_n=\{x;\ |f_{n+1}(x)-f_n(x)|>2^{-n}\}.$$

由(7.12)

$$\int|f_{n+1}-f_n|\geqslant 2^{-n}m^*(S_n),$$

又因为 $\|f_{n+1}-f_n\|_1<4^{-n}$，我们有

$$m^*(S_n)<2^{-n}.$$

对每个正整数 N，定义

$$E_N=\bigcup_{n=N}^{\infty}S_n,$$

注意到

$$m^*(E_N)\leqslant\sum_{n=N}^{\infty}m^*(S_n)$$
$$<\sum_{n=N}^{\infty}2^{-n},$$

所以

$$\lim_N m^*(E_N)=0.$$

现在，给定 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$，选取一个正整数 N，使得 $m^*(E_N)<\delta$。如果 $x\notin E_N$，那么

$$|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\leqslant 2^{-n},\ n>N.$$

于是序列 $\{f_n\}$ 在 E_N 的余集上一致收敛，设 T 是 $\{f_n(x)\}$ 不收敛于 $f(x)$ 的那些 x 组成的集，则 $m^*(T)=0$。又若

$$S=T\cup E_N,$$

我们有 $m^*(S)<\delta$ 以及 $\lim\limits_n f_n(x)=f(x)$ 在 S 的余集上是一致的。这样就可以取任何一个在 S 的余集上成立 $|f-f_n|<\varepsilon$ 的 f_n 作为定理中的 g。我们还要注意的是，S 可以被具有同样性质的稍为大一些的开集所代替（见下面的系）。

系 若 f 是 R^k 上的一个 Lebesgue 可积函数，则存在一个减少的开集序列 $\{U_n\}$ 使得

(i) $\lim m^*(U_n)=0$，

(ii) 对每个 n，f 在余集 $K_n=R^k-U_n$ 上的限制是 K_n 上的连续函数。

证明 这一结果与其说是定理 8 的推论，还不如说是它的证明过程的推论。在证明过程中，我们有一列减少的开集 $\{T\cup E_N\}$。

其外测度趋于 0：

$$m^*(T\cup E_N)<2^{-(N-1)} \tag{7.24}$$

我们可以用一列开长方体来覆盖 $T\cup E_N$，并且它们的和集的外测度小于 $2^{-(N-1)}$，（见 7.3 节习题 2）。令 V_N 是那些开长方体的并，故 V_N 是一个开集并且 $m^*(V_N)<2^{-(N-1)}$。再令 $U_N=V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_N$，那么

U_N 是开的，

$T\cup E_N\subset U_N$，

$m^*(U_N)<2^{-(N-1)}$，

$U_1\supset U_2\supset U_3\supset\cdots$。

此外，对每个 N，$\{f_n\}$ 在 U_N 的余集 $K_N=R^k-U_N$ 上一致收敛。于是 f 在 K_N 上的限制是 K_N 上的一个连续函数。（第 5 章定理 2）

定理 8 表明若 f 可积，那么给定任何 ε 和 δ，存在一个具有紧支柱的连续函数，除去一个外测度小于 δ 的集，它与 f 的偏差一致地小于 ε。要注意的是，上面的系并没有这样说，它没有说对给定的 $\delta>0$，存在一个闭集 K，并且 $m^*(R^k-K)<\delta$，使得 f 在 K 上每点连续。我们知道如此的 f 甚至不必在每点连续。它是说如果我们完全漠视 f 在一个外测度是很小的开集上的值，那么我们就获得一个在余集上连续的函数。

我们早已指出一个 Riemann 可积函数非常接近于一个连续函数，每一个这样的函数都是几乎处处连续的。我们已经能够证明这一点，但为了避免重复，我们将把它拖延到下一节的最后再作证明。

习 题

1. （积分的平移不变性）若 f 是 R^k 上的一个函数，y 是 R^k 内一个向

量，f 的 y-平移是函数 $T_y f$，它的定义是

$$(T_y f)(x) = f(x+y).$$

证明，若 $f \in L^1(R^k)$，则 $(T_y f) \in L^1(R^k)$，并且

$$\int T_y f = \int f.$$

2. 证明若 $f \in L^1(R^k)$

$$\lim_{y \to 0} \| f - T_y f \|_1 = 0.$$

于是，固定 f，映射

$$R^k \xrightarrow{T} L^1(R^k)$$
$$T(y) = T_y f$$

是连续的。(提示：首先对 $C_c(R^k)$ 中的函数证明 $\lim\limits_{y} T_y f = f$，然后再作逼近。)

3. 设 f 是实直线上的可积函数，又设

$$F(x) = \int k_{(-\infty, x]} f, \quad x \in R.$$

证明 F 是 R^1 上的连续函数。再证明若 f 在任何点 x 连续，则 F 是可微的，并且 $F'(x) = f(x)$。

4. 利用定理 8 证明每一个可积函数可以展开为一个级数

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n + h,$$

其中 $f_1, f_2, f_3, \cdots$ 都是具有紧支柱的连续函数，h 是一个零函数。

5. 若 f 是非负可积函数，证明习题 4 的级数展开式中，函数 f_n 并不一定是非负的。

7.6 收敛定理

现在我们介绍几个基本的收敛定理，它们为 Lebesgue 积分提供了有力的工具。首先我们简要地总结可积函数序列的结论，其结论我们曾经在具有紧支柱的连续函数序列中利用过。

定理 9 若 $\{f_n\}$ 是 (Lebesgue) 可积函数序列，满足

(i) $\{f_n\}$ 是 L^1-Cauchy 序列

(ii) 被限

$$f(x)=\lim_n f_n(x)$$

则函数 f 可积，并且 $\{f_n\}$ 在 L^1–范数下收敛于 f。

证明 当 $\{f_n\}$ 是一个快速 L^1–Cauchy序列时，第一个结论才能较方便地被我们证明。于是我们从满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_{n+1}-f_n\|_1<\infty$$

的序列 $\{f_n\}$ 开始。我们将要证明它几乎处处收敛于一个可积函数 f，并且 $\|f-f_n\|_1\to 0$。我们利用定理8，找出函数 $g_n\in C_c(R^k)$ 和集 S_n，使具有以下性质：

(a) $\|f_n-g_n\|_1<n^{-2}$，

(b) $m^*(S_n)<n^{-2}$，

(c) $|f_n(x)-g_n(x)|<n^{-1}$，$x\notin S_n$。

由(a)以及 $\{f_n\}$ 是快速 L^1–Canchy序列，我们得到 $\{g_n\}$ 是 $C_c(R^k)$ 内的快速 L^1–Cauchy 序列。由定理3，极限

$$f(x)=\lim_n g_n(x)$$

几乎处处存在，f 是可积函数并且 $\{g_n\}$ 在 L^1–范数下收敛于 f。再由条件(a)，我们看到 $\{f_n\}$ 在 L^1–范数下也收敛于 f，所以，剩下的还要证明 $f_n(x)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$。

对每个 N，设

$$E_N=\bigcup_{n=N}^{\infty}S_n.$$

再设 S 和 T 分别是 $\{f_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}$ 不收敛于 $f(x)$ 的那些 x 所组成的集。条件(c)保证了

$$S\subset T\cup E_N,\quad N=1,2,3\cdots$$

因为，若 $x\notin(T\cup E_N)$，则 $\{g_n(x)\}$ 收敛于 $f(x)$ 以及 $\{f_n(x)-g_n(x)\}$ 收敛于0。由于

$$m^*(S)\leqslant m^*(T)+m^*(E_N),$$

$$m^*(T)=0,$$

$$m^*(E_N)\leqslant\sum_{n=N}^{\infty}m^*(S_n)\leqslant\sum_{n=N}^{\infty}n^{-2},$$

我们有

$$m^*(S)\leqslant\sum_{n=N}^{\infty}n^{-2},\ \text{对所有}\ N.$$

所以 $m^*(S)=0$。

定理 10(单调收敛定理) 设$\{f_n\}$是 R^k 上的实值可积函数序列，并且是单调增加的：

$$f_1\leqslant f_2\leqslant f_3\leqslant\cdots$$

如果积分的序列$\left\{\int f_n\right\}$有界，则极限

$$f(x)=\lim_n f_n(x)$$

几乎处处有限，f 是一个可积函数，并且

$$\int f=\lim_n\int f_n.$$

证明 选取 $n_1<n_2<n_3<\cdots$，使得

$$\int f_{n_j}>\lim_n\int f_n-2^{-j}$$

那么 $f_{n_1}\leqslant f_{n_2}\leqslant\cdots$是一个快速 L^1-Cauchy 序列，将定理 9 应用到这一子序列上去便立即获得所要结果。

系(Beppo Levi 定理) 设$\{h_n\}$是一列非负可积函数，如果

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int h_n<\infty,$$

那么

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n(x)<\infty,\quad \text{a.e.}$$

h 是一个可积函数，并且

$$\int h=\sum_{n=1}^{\infty}\int h_n.$$

系（积分的弱连续性） 若 $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \cdots$ 是一个单调减少的非负可积函数序列，并且

$$\lim_n f_n(x) = 0, \quad \text{a.e.}$$

则

$$\lim_n \int f_n = 0.$$

下面的结果曾出现在 1906 年 Fatou 的博士论文内。在我们所采用的结构中它是最重要的一个組成部分。

定理 11（Fatou 引理） 设 $\{f_n\}$ 是一列非负可积函数序列，又设极限

$$f(x) = \lim_n f_n(x)$$

几乎处处存在，并且积分的序列

$$\int f_n$$

有界，则 f 是一个可积函数，并且

$$\int f \leq \liminf_n \int f_n \tag{7.25}$$

证明 若 $\{x_n\}$ 是一列实数，回忆一下

$$\liminf_n x_n$$

的定义，它是这个数列的最小的极限点。换句话说，它是 $\{x_n\}$ 中收敛子列的极限的最小值。另一种定义 lim inf 的方法是：对每个 n，设

$$a_N = \inf_{n \geq N} x_n,$$

那么

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$$

所以 $\{a_n\}$ 在扩充的实数系内收敛，lim inf 定义为

$$\liminf_n x_n = \lim_N a_N.$$

因为$\{f_n\}$几乎处处收敛于f，我们有

$$f(x)=\lim_n \inf f_n(x),\ \text{a.e.}$$

为什么呢?因为，如果一个数列收敛，那么它必收敛于它的 lim inf (= lim sup)。定义

$$g_N(x)=\inf_{n\geq N} f_n(x),$$

故

$$g_1\leqslant g_2\leqslant g_3\leqslant\cdots$$

以及

$$f(x)=\lim_N g_N(x),\ \text{a.e.}$$

现在，我们将证明每个g_N是一个可积函数。暂时假定，我们已经证明了这一点。因为$g_N\leqslant f_N$，我们有

$$\int g_N\leqslant\int f_N.$$

定理的一个假设是f_N的积分序列是有界的，所以，g_N的积分序列也是有界的。将单调收敛定理应用到序列$\{g_N\}$上，结论：函数f是可积的并且

$$\int f=\lim_N\int g_N.$$

如果我们证明了下列两点，我们便完成了整个证明：

(i) 每个g_N是可积的；

(ii) $\lim_N\int g_N\leqslant\lim_n\inf\int f_n.$

固定一个N。设

$$h_n^{(N)}=f_N\wedge\cdots\wedge f_{N+n}=\min(f_N,\ \cdots,\ f_{N+n}),$$

则

$$h_0^{(N)}\geqslant h_1^{(N)}\geqslant h_2^{(N)}\geqslant\cdots$$

和

$$\lim h_n^{(N)}=\inf_{n\geq N} f_n=g_N.$$

每个 $h_n^{(N)}$ 是可积的(7.4节习题8)。由单调收敛定理，g_N 是可积的并且

$$\int g_N = \lim_n \int h_n^{(N)}.$$

现在

$$h_n^{(N)} \leqslant f_j,\ j = N,\ N+1,\ \cdots,\ N+n,$$

故

$$\int h_n^{(N)} \leqslant \int f_j,\ j = N,\ \cdots,\ N+n.$$

换句话说，

$$\int h_n^{(N)} \leqslant \min\left\{\int f_N,\ \cdots,\ \int f_{N+n}\right\}.$$

这样就有

$$\int g_N = \lim_n \int h_n^{(N)} \leqslant \inf_{j \geqslant N} \int f_j$$

现在令 N 适当大，就有：

$$\int f = \lim_N \int g_N \leqslant \liminf_n \int f_n.$$

定理 12(控制收敛定理) 设 $\{f_n\}$ 是一列可积函数，它几乎处处点态收敛于函数 f。如果存在一个可积函数 g 使得对每个 n，$|f_n| \leqslant |g|$，那么 f 是一个可积函数，并且

$$\int f = \lim_n \int f_n.$$

证明 我们可以假定 $g \geqslant 0$，这是因为我们总能够用 $|g|$ 代替 g。此外，我们也可以假定 f_n 是实值的，因为若 $f_n = u_n + iv_n$，那么序列 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 所满足的条件同 $\{f_n\}$ 一样。

现在我们有

$$-g \leqslant f_n \leqslant g,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

由于 g 和 f_n 都是可积的，故 $g - f_n$ 也是可积的。此外，

$$g - f_n \geqslant 0,$$

$$\int (g-f_n) \leq 2\int f,$$

以及

$$\lim_n (g(x)-f_n(x)) = g(x)-f(x)$$

几乎处处成立，由 Fatou 引理，$g-f$ 是一个可积函数，并且

$$\int (g-f) \leq \lim_n \inf \int (g-f_n),$$

于是 f 是一个可积函数．再利用这样一个事实．

$$\lim_n \inf(-x_n) = -\lim_n \sup x_n,$$

就有

$$\int f \geq \lim_n \sup \int f_n.$$

现在将 Fatou 引理应用到序列 $g+f_n$ 上，便得到

$$\int f \leq \lim_n \inf \int f_n,$$

结论：

$$\lim_n \sup \int f_n \leq \int f \leq \lim_n \inf \int f_n,$$

所以序列 $\left\{\int f_n\right\}$ 收敛，并且

$$\int f = \lim_n \int f_n.$$

系（有界收敛定理） 设 $\{f_n\}$ 是一列有界的可积函数，它几乎处处点态收敛于函数 f，如果存在一个(外)测度为有限的点集，在此点集外 f_n 为 0，那么 f 是可积函数，并且

$$\int f = \lim_n \int f_n.$$

证明 设 $m^*(S)<\infty$，并且，对任何 n，在 S 外 f_n 为 0，则存在一个开集 U 使得 $S\subset U$ 以及 $m^*(U)<\infty$（可以取 U 为某些开立方体的并集，而这些开立方体覆盖了 S，并且其外测度为 $m^*(S)+$

ε)，那么 U 的特征函数 K_U 是一个可积函数，（为什么？因为 $U=\bigcup\limits_n K_n$，这里 K_n 是一列增加的紧集．再利用单调收敛定理．）．若对一切 n 有 $|f_n|\leqslant M$，就可以利用控制收敛定理，这时函数 $g=MK_U$。

上面所给出的控制收敛定理是使我们有可能获得结论

$$\int(\lim f_n)=\lim\int f_n$$

的一个最好结果，我们不应该盲目地认为利用 Lebesgue 积分以后，积分和极限的次序交换总是可能的。某些在收敛性上的限制，例如，控制函数 g 就是必要的。考虑 R^1 上的函数序列

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & k\leqslant x<k+1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 $\{f_n\}$ 点态（有界的）收敛于 0，且对一切 n，有

$$\int f_n=1,$$

作为单调收敛定理的应用，我们证明下面的定理．虽然它被称为定理，但就其精神实质来说应该看成一个应用的例子．

定理 13 闭区间 $[a, b]$ 上的一个复值函数 f 是 Riemann 可积的，当且仅当

(a) 它是有界的．

(b) 它在 $[a, b]$ 几乎处处连续．

若 f 是 Riemann 可积的，那么函数

$$g=\begin{cases}f, & \text{在}[a, b]\text{上},\\ 0, & \text{其它点},\end{cases}$$

在 R^1 上是 Lebesgue 可积的，并且 $\int g=\int_a^b f(x)dx$。

证明 显然，我们可以假定 f 是实值的，我们知道，任何 Riemann 可积函数是有界的，于是，我们的任务是证明 $[a, b]$ 上的一

个有界实值函数是 Riemann 可积的当且仅当它在$[a, b]$几乎处处连续。

首先，设 f 是 Riemann 可积的，这表示当网眼

$$\|P\| = \max_j (x_j - x_{j-1})$$

趋于 0 时，Riemann 和

$$S(f, P, T) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}), \quad t_j \in [x_{j-1}, x_j] \tag{7.26}$$

收敛于$\int_a^b f(x)dx$。或者，如我们曾经修改过的那样，这表示

$$\lim_{\delta \to 0} \operatorname{diam} \Sigma_\delta(f) = 0,$$

这里$\Sigma_\delta(f)$是所有(7.26)的和式所组成的集，其中划分 P 具有$\|P\| < \delta$。对每一个给定的划分 P，我们有

$$\sum_{j=1}^{n} m_j (x_j - x_{j-1}) \leqslant S(f, P, T) \leqslant \sum_{j=1}^{n} M_j (x_j - x_{j-1}), \tag{7.27}$$

其中

$$M_j = \sup_{t \in [x_{j-1}, x_j]} f(t),$$

$$m_j = \inf_{t \in [x_{j-1}, x_j]} f(t).$$

此外，适当地选取 $T = (t_1, \cdots, t_n)$，我们能够使 $S(f, P, T)$ 足够接近左端的和数或右端的和数，这些和数仅仅依赖于划分 P。我们记下和(它是由 m_j 产生的)为 $\underline{S}(f, P)$，记上和(它是由 M_j 产生的)为 $\overline{S}(f, P)$。那么，显然

$$\operatorname{diam} \Sigma_\delta(f) = \sup_{\|P\| < \delta} [\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P)].$$

因此，由于 f 是 Riemann 可积的，我们有

$$\lim_{\|P\| \to 0} [\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P)] = 0.$$

选取划分的序列$\{P_n\}$使得

(a) 对每个 n, P_{n+1} 是 P_n 的加细,

(b) $\lim_n \|P_n\| = 0$,

(c) $\lim_n [\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n)] = 0$.

现在

$$(\overline{S}f, P_n) = \int_a^b u_n(x)dx,$$

$$\underline{S}(f, P_n) = \int_a^b v_n(x)dx,$$

其中 u_n 是一个阶梯函数，它在由 P_n 确定的每一个子区间 I 上是一个常数，其值为 $\sup_I f$，v_n 也是一个阶梯函数，它在子区间 I 上的值是 $\inf_I f$。很明显，对每个 n 有 $u_n \geqslant v_n$，并且由加细条件 (a)，我们有 $u_n \geqslant u_{n+1}$，$v_n \leqslant v_{n+1}$，于是

(7.28) $$v_1 \leqslant v_2 \leqslant \cdots \leqslant f \leqslant \cdots \leqslant u_3 \leqslant u_2 \leqslant u_1.$$

因为 u_n 是阶梯函数，我们知道，如果我们将它的定义扩张到$[a, b]$之外，并定义它在$[a, b]$外的值为 0，我们就得到一个 R^1 上的 Lebesgue 可积函数，让我们仍旧记扩张后的函数为 u_n。对每一个 v_n 也同样这样做。那么我们知道(例 3)

$$\int u_n = \int_a^b u_n(x)dx = \overline{S}(f, P_n),$$

$$\int v_n = \int_a^b v_n(x)dx = \underline{S}(f, P_n).$$

因此，Riemann 可积性和条件(b)告诉我们

$$\lim_n \int (u_n - v_n) = 0,$$

由(7.28)，$\{(u_n - v_n)\}$是单调减少的非负可积函数序列。又因为它们的积分趋于 0，那么单调收敛定理(它的系)告诉我们

$$\lim_n[u_n(x)-v_n(x)]=0, \text{ a.e.}$$

现在我们断言 f 在 $u_n(x)-v_n(x)$ 收敛于 0 的每一点 x 连续。首先，考虑点 x，它不是划分 P_n 所确定的任何子区间的端点。若 $u_n(x)-v_n(x)<\varepsilon$，那么存在一个含有 x 的(小的) 开区间，在这个开区间上 $v_n(x)\leqslant f(x)\leqslant u_n(x)$，也就是，存在 $\delta>0$，由 $|x-t|<\delta$ 可得

$$|f(x)-f(t)|\leqslant u_n(x)-v_n(x)<\varepsilon.$$

这样我们就看出 f 在 x 连续。如果 x 是可列个端点中的一个，只要将这一论述少许改变一下就可以了。如果不感到惊讶的话，我们可以把这个可列集(它有零测度)抛掉，在这个集上 $u_n(x)-v_n(x)$ 可能不趋于 0。这样，我们便证明了 f 是几乎处处连续的。

刚才我们给出的论述反之也成立，设 f 是几乎处处连续的，选取一个划分的序列，它满足前面的(a) 和(b)。若 x 是 f 的任一连续点(并且 x 不是子区间的端点)，则

$$\lim_n[u_n(x)-v_n(x)]=0.$$

于是序列 $\{(u_n-v_n)\}$ 单调收敛于一个几乎处处为 0 的函数。这样就有

$$\lim_n\int(u_n-v_n)=0.$$

(您必须用哪一个定理来得出这一结论呢?)所以我们有

$$\lim[\overline{S}(f,P_n)-\underline{S}(f,P_n)]=0,$$

并且它对所有满足条件(a)和(b) 的序列 $\{P_n\}$ 成立，这表明 f 是 Riemann 可积的。

习　题

1. 设 S 是一个具有有限外测度的集，则

$$m^*(S)=\inf\left\{\int f;f\in L^1,\ f\geqslant0,\ \text{在 } S \text{ 上 } f=1\right\}$$

2. 若 g 是有界连续函数，f 是可积函数，则 fg 是可积的。

3. （含有参变量积分的连续性）设函数 $f(x, y)$ 是 y 的连续函数，并且对每个固定的 y，它又是 x 的可积函数。如果 $|f(x, y)| \leqslant g(x)$，g 是某个与 y 无关的可积函数，证明

$$h(y) = \int f(x, y)dx$$

是连续的。

4. 若 $f \in L^1(R^1)$，f 的 Fourier 变换是

$$\hat{f}(t) = \int f(x)e^{-ixt}dx,$$

证明对每一个 $f \in L^1$，$\hat{f}$ 是一致连续的。

5. 设 f 是在实直线上处处可微的函数，并且其导数有界。证明若 $-\infty < a < b < \infty$，函数 $k_{[a,b]}f'$ 是 Lebesgue 可积的，并且

$$\int k_{[a,b]}f' = f(b) - f(a).$$

（提示：证明在 $[a, b]$ 上差商 $n[f(x+(1/n)) - f(x)]$ 有界并点态收敛于 $f'(x)$。）

6. 函数 $f(x) = x^2\cos x^{-2}$ 在实直线上处处可微，它的导数是否可积？

7. 设 f 是有紧支柱的非负可积函数。证明 $\sqrt{f}$ 是一个可积函数。

8. 设 f 是有界可积函数，证明 f^2 是可积函数。

9. 设 $\{f_n\}$ 是一个可积函数序列，使得

(i) $0 \leqslant f_n \leqslant 1$，

(ii) $\lim\limits_n \int f_n = 1$，

(iii) 存在某个紧集 K，在 K 外每个 f_n 都为 0。

证明

$$\lim_n \int (1 - f_n)^2 = 0.$$

7.7 可测函数和可测集

在这一节里我们将给出可测函数的概念，然后利用它引出可测集，并且研究测度（长度，面积，体积，等等）——把它看成可测集类上的函数——的性质。这将带领我们进入这一章中我们曾经讨论过的很多问题的核心。

定义 R^k 上的可测函数是一个复值函数，使得

(i) f 在 R^k 上几乎处处有定义，

(ii) 存在一个(有紧支柱的)连续函数序列几乎处处点态收敛于 f。

我们立刻说明为什么把"有紧支柱"放在圆括号内，这是因为容易看出，不论我们利用连续函数序列还是有紧支柱的连续函数序列，我们都得到同一个"可测"函数类。设 $f_1, f_2, f_3, \cdots$ 都是 R^k 上的连续函数，并且

$$\lim_n f_n(x) = f(x), \text{ a.e.}$$

设 $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots$ 是一列增加的紧集，使得

$$\bigcup_n K_n = R^k$$

对每个 n，选取一个函数 $h_n \in C_c(R^k)$，使得在 K_n 上 $h_n = 1$，令 $g_n = f_n h_n$，则 $g_n \in C_c(R^k)$，并且在 $\{f_n(x)\}$ 的每一个收敛点上有

$$\lim_n g_n(x) = \lim_n f_n(x).$$

这是因为，给定 x，存在 N，使得 $x \in K_N$，于是

$$g_n(x) = f_n(x), \quad n \geq N,$$

可测函数是我们所选中的"合理的"或"非病态的"函数。它们包含着一大类函数。下面我们给出这一大类函数的一些基本事实，

(i) 若 f 和 g 都是可测函数，c 是一个复数，则 $(cf+g)$ 是一个可测函数。换句话说，所有可测函数在通常意义下组成一个线性空间。

(ii) 函数 f 是可测的当且仅当它的实部和虚部都是可测的。

(iii) 若 f 可测，则 $|f|$ 也可测。

(iv) 若 f 和 g 都是实值可测函数，则

$$(f\vee g)(x)=\max(f(x),\ g(x)),$$
$$(f\wedge g)(x)=\min(f(x),\ g(x)),$$

都是可测函数。

(v) 若 f 和 g 都是可测函数，则乘积 fg 也是一个可测函数。

(vi) 每一个零函数是可测的。

我们把这6个结论的证明留作习题。前5个从连续函数的相应事实立即得到。条款(vi)需要作一些思考（但不用作很大努力）。

读者若仔细比较可积函数和可测函数的定义就会发现，可积性要求更多的条件，我们用已经建立的方法可以证明可积性正好是"可测性加上对函数值的某种限制"。

定理 14 若 f 是可测函数，则 f 是可积的当且仅当存在一个可积函数 g 使得 $|f|\leqslant|g|$。特别的，具有紧支柱的有界可测函数一定是可积的。

证明 象通常的情形那样，定理的"当"的部分是非平凡的。为了证明它，我们又只考虑实值函数的情形。我们说(实值函数) f 是可测的，因而我们有一列具有紧支柱的连续函数 f_n，使得

$$f(x)=\lim_n f_n(x),\ a.e.$$

我们也有 $|f|\leqslant g$，这里 g 是非负的可积函数。换句话说，

$$-g\leqslant f\leqslant g.$$

设

$$h_n=(f_n\wedge g)\vee(-g),$$

这就是

$$h_n(x)=\begin{cases}f_n(x), & -g(x)\leqslant f_n(x)\leqslant g(x),\\ g(x), & f_n(x)>g(x),\\ -g(x), & f_n(x)<-g(x).\end{cases}$$

因为 g 是可积的（f_n 也是如此），所以每个 $h_n(x)$ 可积。此外，

$$-g\leqslant h_n\leqslant g,$$

$$\lim_n h_n(x)=f(x),\ \text{a.e.}$$

由控制收敛定理，f 是可积的。

定理中关于具有紧支柱的有界可测函数的断言，由于每一个这样的函数都是被（常数乘）某个紧集上的特征函数所控制，断言就获得证明。

系 若 f 是一列可积函数，g 是一个有界可测函数，则 fg 是可积的。

证明 注意到两个连续函数的乘积是连续的，两个可测函数的乘积是可测的，利用定理 14 立即得出结论。

系 设 $\{f_n\}$ 是一列可积函数，几乎处处点态收敛于函数 f，则 f 是一个可测函数。

证明 我们可以假定 f_n 都是实值的。现在，我们削去 f_n 的头和足，作出一个新的函数 h_n 如下，设 $K_1\subset K_2\subset K_3\subset\cdots$ 是一列增加的紧集，它们的和集包含了 R^n 中所有的点：

$$\bigcup_n K_n=R^n.$$

对每个 n，令

$$h_n=(-n)\vee(k_{K_n}f)\wedge n,$$

即

$$h_n(x)=\begin{cases}0, & x\notin K_n,\\ f(x), & x\in K_n,\ -n\leqslant f(x)\leqslant n\\ n, & x\in K_n,\ f(x)>n,\\ -n, & x\in K_n,\ f(x)<-n.\end{cases}$$

则 h_n 是可测函数。事实上，h_n 还是可积函数，这是因为函数序列

$$-n\vee(K_{K_n}f_j)\wedge n,\ j=1,2,3,\cdots$$

点态有界地收敛于 h_n，并且所有这些函数都在 K_n 外为 0（有界收

敛定理)。因为 $h_n \in L^1$，我们能够找到一个具有紧支柱的连续函数 g_n 和一个集 S_n，使得

$$m^*(S_n) < n^{-2},$$

$$|g_n(x) - h_n(x)| < \frac{1}{n}, \qquad x \notin S_n.$$

我们将断言序列 $\{g_n\}$ 几乎处处点态收敛于 f。我们设

$$E_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} S_n.$$

又设 T 是使 f 没有定义的那些点组成的集，再设

$$E = \bigcap_N E_N.$$

那么，T 是一个零测度集，并且因为

$$E \subset E_N, \ N = 1, 2, 3, \cdots$$

$$m^*(E_N) \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} n^{-2},$$

所以 E 也是一个零测度集。我们将不难看出，在零测度集 $T \cup E$ 外 $\{g_n\}$ 点态收敛于 f。若 $x \notin T \cup E$，则 $f(x)$ 是某个实数（x 在某个 K_n 内)，于是存在正整数 M，使得

$$x \in K_n, \ n \geqslant M,$$

$$|f(x)| \leqslant M.$$

那么我们有

$$h_n(x) = f(x), \ n \geqslant M. \tag{7.29}$$

因为 $x \notin E$，则存在 N，使得 $x \notin E_N$，这样就有

$$|g_n(x) - h_n(x)| < \frac{1}{n}, \ n \geqslant M. \tag{7.30}$$

由(7.29)和(7.30)便得到 $\lim_n g_n(x) = f(x)$。

系 若 $f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant \cdots$ 是实可测函数的单调增加序列，又若极限

$$f(x) = \lim_n f_n(x)$$

几乎处处有限，则 f 是一个可测函数。

通常（也是非常有用的）要将积分推广到非负可测函数上去。对这种函数而言，只有当它的值是"常常很大"时才不可积。在这种情形下，其积分成为 $+\infty$。

定义 设 f 是一个非负可积函数。定义 f **的积分**是所有满足 $g\leqslant f$ 的可积函数 g 的积分之上确界：

$$\int f=\sup_{\substack{g\in L' \\ g\leqslant f}}\int g.$$

要注意的是，我们并没有对一切可测函数定义其积分，我们所做的只是对非负可测函数而已（当然，对非负可积函数也可以）。我们利用这一定义，立即可得出下面非常重要而概括的结果。

定理 15 若 f 是一个复值函数，在 R^n 上几乎处处有定义，则下列陈述等价：

(i) f 是可积的。

(ii) f 是可测的，并且 $\int|f|<\infty$。

(iii) 存在一个具有紧支柱的连续函数序列 $\{f_n\}$，使得

$$\lim_n f_n(x)=f(x),\ \text{a.e.}$$

$$\sup_n\int|f_n|<\infty.$$

证明 利用 Fatou 引理和单调收敛定理。

定义 如果 R^n 中的一个子集，其特征函数是一个可测函数，就称此子集是一个可测集。

可测集的下列性质，实质上可以从我们所知道的有关可测函数的性质直接获得。

(i) 若 S 和 T 都是可测集，则并 $S\cup T$，交 $S\cap T$ 都是可测集。

(ii) 集 S 是可测的当且仅当其余集 R^n-S 是可测集。

(iii) 若 $\{S_n\}$ 是一列可测集，则其并 $\bigcup_n S_n$ 以及交 $\bigcap_n S_n$ 都是可测集。

(iv) 每一个紧集都是可测集。

(v) 每一个零测度集是可测集。

可测集究竟是一些什么样的集呢？由于每一个紧集是可测的，而每一个闭集都是一列增加的紧集的并集，所以每一个闭集是可测的。而每一个开集也是这样的并集，所以每一个开集也是可测的。当然，我们也可以从开集的余集是闭集这一事实看出来。所以，可测集类包含了所有闭集（和所有开集），以及由这些集经过可列次并，交，余等运算所产生的任何集。此外，还要加上所有零测度集，以及由闭集或零测度集之并，交，余所产生的集。再连同下面的例子，这就是我们所要说的一切了。

例 4 设 U 是一个开集。我们讨论一下如何计算它的测度 $m(U)$。首先从图 27 的网眼为 1 的网格开始。确切地说，将每一个坐标轴分成互不重叠的半闭区间 $[n, n+1)$，$n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$ 它们把 R^n 划分成无限多个不相重叠的立方体。作为 $m(U)$ 的第一次近似值，我们取

$$\sum_n m(B_n),$$

其中 $B_1, B_2, \cdots$ 都是那种（由网格组成的）立方体，它们的闭包在 U 内，这种立方体可能一个也没有，也可能是有限多个或者无限多个。令 K_1 是这些立方体 B_n 之并的闭包。很明显，K_1 也是这些立方体 B_n 之闭包的并，这是因为它们都有固定的大小，所以从不同的立方体内取出的点组成的序列是不收敛的。由于

$$\bigcup_n B_n \subset K_1 = \bigcup_n \bar{B}_n,$$

我们有

$$\sum_n m(B_n)\leqslant m(K_1)\leqslant\sum_n m(\bar{B}_n)=\sum_n m(B_n),$$

所以

$$m(K_1)=\sum_n m(B_n).$$

现在，将同样的过程运用到开集 $U-K_1$ 上去，这时，利用网眼为$\frac{1}{2}$的网格，我们得到一个闭集 $K_2\subset U-K_1$，它是一列（有限或无限）边长为$\frac{1}{2}$的闭立方体序列之并，这一并集的测度为 $m(K_2)$。再将这一过程运用到 $U-K_1-K_2$ 上去，利用网眼为 $\frac{1}{4}$ 的网格，如此继续下去，结果是

$$U=\bigcup_n K_n,$$

其中 K_1，K_2，K_3，…都是两两不同的闭集，并且每一个 K_n 是一列闭立方体的并，其测度是 $m(K_n)$。把所有这些立方体放在一起，U 就可以表示为这些立方体的并集，它的测度为 $m(U)$（见定理 16）。稍为留意一下，我们就能够将 U 表示为一列互不重叠的立方体（显然，每一个都非闭）的并；但是从测度的观点来看，这却不那么精练。

定义 若 S 是可测集。S 的**测度**是 S 的特征函数的积分：

$$m(S)=\int K_S.$$

引理 设 S 和 T 都是可测集，那么

(i) $0\leqslant m(S)\leqslant\infty$。

(ii) 若 $S\subset T$，则 $m(S)\leqslant m(T)$。

(iii) $m(S\cup T)\leqslant m(S)+m(T)$，当 $S\cap T=\varnothing$ 时，等式成立。

证明 (i)和(ii)立即可得。注意到

$$k_{S\cup T}\leqslant k_S+k_T,$$

并且当 $S \cap T = \varnothing$ 时，等式成立，这样便得出(iii)。

定理 16 设 $\{S_n\}$ 是一列可测集，并设

$$S = \bigcup_n S_n,$$

则 S 也是可测的，并且

(i)（测度的连续性） 若 $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \cdots$，则

$$m(S) = \lim_n m(S_n).$$

(ii)（测度的可列可加性） 若 $S_i \cap S_j = \varnothing$，$i \neq j$，则

$$m(S) = \sum_{n=1}^{\infty} m(S_n).$$

证明 (i)和(ii)是等价的。这是因为如果 S 是一列增加序列 $\{S_n\}$ 之并，我们也有

$$S = S_1 \cup (S_2 - S_1) \cup (S_3 - S_2) \cup \cdots,$$

这样就可以应用引理中的(iii)，并且我们知道

$$m(S_n) = m(S_{n-1}) + m(S_n - S_{n-1}).$$

为了证明(i)，设 k_n 是 S_n 的特征函数，故

$$k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq \cdots$$

$$\lim_n k_n(x) = k(x),$$

这里 $k = k_S$。考虑极限

$$\lim_n m(S_n) = \lim_n \int k_n.$$

如果这一极限是有限的，单调收敛定理告诉我们 k 是可积的且其积分就是这一极限，即

$$m(S) = \lim_n m(S_n). \tag{7.31}$$

如果这一极限是 $+\infty$，由于对每个 n，$m(S) \geq m(S_n)$，故 $m(S) = +\infty$，于是(7.31)也成立。

一旦我们完成了更进一步的任务之后，我们将获得关于“测

度"的一幅完整的图画。我们必须表明对所有简单的集 S，$m(S)$ 应该是什么。首先须要注意，我们现在所用的记号和我们曾经用过的是一致的。

(i) S 是一个零测度集当且仅当 S 是可测的，并且 $m(S)=0$。这一结论由

$$\int k_S = 0$$

当且仅当 k_S 是零函数立即得出。

(ii) 若 B 是一个立方体，则 $m(B)$ 是一个 k 维体积，在前面我们已经记它为 $m(B)$，见 7.3 节的习题 4, 5 和 6。

定理 17 若 S 是一个可测集，则

$$m(S)=\inf\{m(U); U \text{ 是开集}, S\subset U\}.$$

从而有，$m(S)=m^*(S)$。

证明 首先注意到对任何可测集 T，$m(T)\leqslant m^*(T)$。若 $\{B_n\}$ 是一列覆盖着 T 的立方体，那么

$$m(T)\leqslant \sum_n m(B_n).$$

现在，若 $m(S)=\infty$，则对任何含有 S 的开集 U，有 $m(U)=\infty$，同样的有 $m^*(S)=\infty$，所以在这一情形下，定理是成立的。

设 $m(S)<\infty$，这表示 k_S 是一个可测函数。令 $\varepsilon>0$，由定理 8 的系，我们能够找到一个开集 W 和一个实值函数 $f\in C_c(R^k)$，使得

(a) $m^*(W)<\varepsilon$，于是 $m(W)<\varepsilon$，

(b) $|f(x)-k_S(x)|<\varepsilon$，$x\notin W$。

令 $V=\{x; f(x)>1-\varepsilon\}$，条件(b)告诉我们两件事：

$$x\notin W, x\in S \Longrightarrow x\in V,$$

$$x\notin W, x\notin S \Longrightarrow x\notin V,$$

换句话说，

$$S\subset V\cup W,$$
$$V\subset S\cup W.$$

由第二个关系式，我们有

$$m(V)\leqslant m(S)+m(W)<m(S)+\varepsilon.$$

如果我们令 $U=V\cup W$，则 U 是一个包含 S 的开集，并且

$$m(U)\leqslant m(V)+m(W)$$
$$<m(S)+2\varepsilon.$$

这就给出了定理的第一个断言。

为了得出 $m(S)=m^*(S)$，只要注意到(例 4)每一个开集 U 都是一列立方体 $\{B_n\}$ 之并，所以

$$m(U)=\sum_{n=1}^{\infty}m(B_n).$$

若 $S\subset U$，则

$$m^*(S)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m(B_n)=m(U),$$

又若我们对所有这种开集 U 取 $m(U)$ 的下确界，便得到 $m^*(S)\leqslant m(S)$.

系 若 S 是一个可测集，则

$$m(S)=\sup\{m(K);K\text{ 是紧集},K\subset S\}.$$

证明 将定理应用于 R^k-S，即得。

在不少场合，我们感兴趣的是，定义在 R^k 的某个子集上的函数的积分而不是定义在整个 R^k 上的函数的积分。例如，在学习 Fourier 级数时，我们感兴趣的是实直线的某个闭区间（比如 $[-\pi,\pi]$）上的函数。我们须要这种子集上的积分的一些完善的定理。例如，我们要断言把区间 $[a,b]$ 上以

$$\int_a^b|f(x)|dx$$

为范数的连续函数空间完备化，就产生 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积函

数空间。幸运的是，我们所掌握的 R^n 上积分的理论，没有一个会使我们感到困难，我们所要做的一切不过是将 $L^1(R^n)$ 中的函数限制在某个子集上，而把这个子集外发生的事情都统统忘掉。

定义 设 S 是 R^n 的一个可测子集，f 是 R^n 上的可积函数，(或非负可测函数)。**f 在 S 上的积分**定义为

$$\int_S f = \int k_S f.$$

由上述定义以及我们已经知道的一些简单结果立即获得下列性质

(i) 若 S 和 T 是两个互不相交的可测集，则

$$\int_{S\cup T} f = \int_S f + \int_T f.$$

(ii) 若 $m(S)=0$，则

$$\int_S f = 0.$$

(iii) 若 f 是实值函数，则

$$m(S)\inf_S f \leqslant \int_S f \leqslant m(S)\sup_S f.$$

定义 设 S 是 R^n 的一个可测子集，f 是一个复值函数，若

(a) f 在 S 上几乎处处有定义

(b) 在 R^n 上存在一列有紧支柱的连续函数序列 $\{f_n\}$，使得 $\lim_n f_n(x)=f(x)$ 在 S 内几乎处处成立。

就称 f 是 S 上的**可测函数**。

又如果 f 不但满足(a)，(b)，还满足

(c) 积分序列 $\int_S |f_n|$ 有界。

则称 f 是 S 上的一个**可积函数**。

引理 设 f 是在 S 上几乎处处有定义的复值函数，则下列陈述等价

(i) f 是 S 上的可测(可积)函数。

(ii) 存在 R^k 上的可测(可积)函数 g，使得 g 在 S 上的限制是 f，即对一切 $x\in S$，$g(x)=f(x)$。

(iii) 函数

$$g=\begin{cases}f, & \text{在 } S \text{ 上,}\\ 0, & \text{在 } S \text{ 外,}\end{cases}$$

是 R^k 上可测(可积)函数。

证明 留作习题。

我们用这个简单的定理武装之后，就可以获得 S 上关于可测函数和可积函数的所有收敛定理。当然我们记 $L^1(S)$ 是 S 上所有可积函数组成的空间，并且带有范数

$$\|f\|_1=\int_S |f|.$$

它包含了每一个具有紧支柱的连续函数在 S 上的限制，并且在 L^1 范数下是完备的。所有这些都是因为 $L^1(S)$ 是（能够被看作是）$L^1(R^k)$ 的子空间，它含有那样一些函数，那些函数在 S 外都是 0。当然，我们将不采取记号 $\|\cdots\|_1$ 作为 S 上的 L^1 范数，除非在课文里可以明显地看出我们所讨论的函数都是在 S 上的限制。

现在我们关于子集上的积分建立一个非平凡的结果。

定理 18 设 f 是 R^k 上可积函数，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$\int_S |f|<\varepsilon,$$

对每一个 $m(S)<\delta$ 的可测集 S 成立。

证明 假设这一结果对某个 ε 不成立。那么，存在一列可测集 $\{S_n\}$，使得

$$m(S_n)<2^{-n},$$

$$\int_{S_n} |f| \geqslant \varepsilon.$$

令

$$E_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} S_n,$$

$$E = \bigcap_{N=1}^{\infty} E_N,$$

由于$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$，那么由控制收敛定理得

$$\int_E |f| = \lim_N \int_{E_N} |f| \geqslant \varepsilon.$$

另一方面，$m(E) = \lim_N m(E_N) = 0$，得出矛盾。

习　题

在本节为数众多的习题中，我们将它们分成三类。

A. 可测函数

1. 如何从连续函数的相应的论述直接得出第391页中的论述 (i)—(v)?

2. 证明每一个零函数是可测函数。

3. 若 f 是一个非负可测函数，$\{g_n\}$ 是任意一个可积函数序列，使得

$$g_1 \leqslant g_2 \leqslant g_3 \leqslant \cdots$$
$$\lim_n g_n(x) = f(x), \text{ a.e.}$$

证明

$$\lim_n \int g_n = \int f.$$

4. 若 f 和 g 都是非负可测函数；$c>0$，则

$$\int (cf+g) = c\int f + \int g.$$

5. 若 f 是非负可积函数，讨论

$$\int \ln f,$$

证明：如果我们允许 $-\infty$ 是它的值，那么这一积分总是合理的。（提示：若 $x \geqslant 1$ 有 $\ln x \leqslant x$）。

6. 设 w 是一个固定的非负可积函数，又设 $L(w)$ 是由一些可测函数 f 组成的集，这些函数满足 fw 是可积的。对 $f \in L(w)$，定义

$$\|f\| = \int |f| w.$$

证明下列结果：

(a) $(L(w), \|\cdots\|)$是一个半范数线性空间。

(b) 这一空间是完备的。

7. 设

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, \quad 0 < |x| \leqslant 1.$$

f 在$[-1, 1]$上可积吗？

8. 设 f 是 R^K 上一个固定的实值可积函数。对每一个可测集 S，定义

$$F(S) = \int_S f,$$

设

$$b = \sup_S F(S).$$

是否存在一个可测集 S，使得

$$F(S) = b?$$

F 的象是否连通的？

9. 设 K 是使得 $0 \leqslant f \leqslant 1$ 的所有可测函数组成的集，证明

(a) K是一个凸集

(b) f 是 K 的极值点当且仅当 f 是某个可测集的特征函数。

10. 若 f 是 R^K 上实值可测函数，g 是实直线上的连续函数，则复合函数 $g \circ f$ 是可测函数。

11. 若 f 是 R^1 上的连续函数，g 是 R^1 上的可测函数，又若对每一个零测集 $E \subset R^1$，$f^{-1}(E)$是可测的，则复合函数 $g \circ f$ 是可测的。

*12. 定义区间$[0, 1]$上的函数 f 如下：若

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n}, \quad a_n = 0, 1,$$

它是 x 的二进制展开，定义

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}.$$

(a) 证明 f 在$[0, 1]$上几乎处处有定义，并且 f 是 $[0, 1]$ 上的可测函数。

(b) 证明 f 将$[0, 1]$映射入 Cantor 点集。

(c) 设 g 是 Cantor 点集上的连续函数，$g\circ f$ 是不是一个可测函数？

B. 可测集

13. 证明集 $S\subset R^K$ 是可测的当且仅当 R^K-S 是可测的。

14. 若 $\{S_n\}$ 是一列可测集，证明 $\bigcup\limits_n S_n$ 和 $\bigcap\limits_n S_n$ 都是可测集。

15. 若 S 是可测集，$m(S)>0$，则存在一点 $x\in S$，使得对 x 的每一个邻域 N 有 $m(N\cap S)>0$。

16. （测度的平移不变性）若 S 是一个可测集，则 S 的任何平移

$$y+S=\{y+x;x\in S\}$$

是可测的，并且 $m(y+S)=m(S)$。

17. 若 B 是 R^K 内的一个球，则（B 是可测的）$m(B)$ 只依赖于 B 的半径。

18. 设 θ 是一个角，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$。又设 S 是 R^2 内的一个矩形，S_θ 是 S 绕原点转过 θ 角后所得到的矩形。证明 S 能够分解为有限多个三角形，这些三角形可以在 R^2 内平移到新的位置，并且重新聚集起来组成 S_θ。由此可得出 R^2 上的 Lebesgue 测度具有旋转不变性。

19. 下列事实是否正确？若 S 和 T 都是可测集，其代数和

$$S+T=\{x+y;x\in S,\ y\in T\}$$

也是可测集。

20. 在平面上构造一个集 S，使得 $m(S)=0$，但它和不可列条垂线中每一条垂线的交集是一个具有正的 1 维测度的集。

21. 如何构造 $[0,1]$ 内的一个可测子集 S，使得在 $[0,1]$ 的每一个区间内，S 和它的余集都有正的测度，亦即，若 $0\leqslant a<b\leqslant 1$，则

$$0<m(S\cap(a,b))<b-a.$$

22. 不存在 $[0,1]$ 内的一个可测子集 S，使得对每一个子区间 (a,b)

$$m(S\cap(a,b))=\frac{1}{2}(b-a).$$

23. 设 f 是 R^K 上实值函数。证明 f 是可测的当且仅当 f 的图象是 R^{K+1} 内的一个可测集。

*24. 若 S 是 R^K 的一个线性子空间，$m(S)>0$，则 $S=R^K$。

25. 若 S 是一个可测集，并且 f 是实值可积函数，则

$$m(S)\inf_S f\leqslant\int f\leqslant m(S)\sup_S f.$$

26. 对(任意)集 S，定义它的内测度为

$$m_*(S)=\sup\{m(K);K\text{为紧集},K\subset S\},$$

证明 S 是可测的当且仅当 $m^*(S)=m_*(S)$。

27. R^K 的子集族 $\mathscr{S}$ 如果满足

(i) 空集和 R^K 都在 $\mathscr{S}$ 内。

(ii) 若 $S\in\mathscr{S}$，则余集 $R^K-S\in\mathscr{S}$。

(iii) 若$\{S_n\}$是 $\mathscr{S}$ 内任一序列，则并 $\bigcup_n S_n$ 也在 $\mathscr{S}$ 内

就称 $\mathscr{S}$ 是一个 **σ-代数**。证明下列结果

(a) 任意个 σ-代数的交仍为 σ-代数。

(b) 在 R^K 内任意给定一个集族，则存在一个包含该族的最小 σ-代数(称它是由该族成生的 σ-代数)。

(c) 由 R^K 内所有紧子集生成的 σ-代数和 R^K 内所有闭长方体生成的 σ-代数是相同的。(这个 σ-代数称为 R^K 内的 **Borel 族**)

(d) R^K 中的集 S 是可测的当且仅当它和某个 Borel 集仅相差一个零测度集。

28. (在刚体运动下测度的不变性) 若 S 是 R^K 中的一个可测子集，证明

$$m(S)=\inf_{\{B_n\}}\sum_{n=1}^{\infty}m(B_n),$$

其中下确界是对 S 的由可列个开球所组成的所有开覆盖而取的。再利用习题 17 的结论证明 R^K 上的 Lebesgue 测度在刚体运动下是不变的。

29. (Caratheodory) R^K 的子集 S 是可测的当且仅当

$$m^*(E)=m^*(E\cap S)+m^*(E\cap(R^K-S))$$

对每一个 $E\subset R^K$ 成立。

C. 简单函数和 Lebesgue 过程

30. 设 f 是可测函数，若 K 是复平面上的一个紧集，则 $f^{-1}(K)$ 是可测集。又若 U 是开集时，$f^{-1}(U)$ 是否仍为开集？(提示：对连续函数这是成立的)

31. 设 $E_1, E_2, \cdots, E_N$ 都是可测集，$a_1, a_2, \cdots, a_N$ 都是常数，形如

$$s=\sum_{n=1}^{N}a_n k_{E_n}$$

的函数称为**简单函数**，换句话说，简单函数是可测集的特征函数的线性组合。

证明

(a) 所有简单函数组成(有界)可测函数的一个线性子空间。

(b) 若 f 是有界可测函数，则 f 可以被简单函数一致逼近(对(b)提示：在平面上取一个含有 f 的象的正方形，将它划分为许多小的正方形，并设 E_n 是这些小正方形(在 f 下的)逆象)。

32. 若 f 是可积的，$\varepsilon>0$，则存在一个简单函数 s，使得

$$\int |f-s|<\varepsilon.$$

33. 设 f 是 R^K 上几乎处处有定义的实值函数。又设对每个实数 t，集

$$E_t=\{x; f(x)>t\}$$

是可测的。证明 f 是可测函数(提示：对不同的 t，利用 E_t 的余集，交集等等可以看出 $\{x; f(x)<t\}$，$\{x; a<f(t)\leqslant b\}$ 等等都是可测的，再用简单函数逼近 f)。

34. (Lebesgue 的阶梯) 设 f 是一个非负可积函数，又设

$$E_{11}=\left\{x; 0\leqslant f(x)<\frac{1}{2}\right\},$$

$$E_{12}=\left\{x; \frac{1}{2}\leqslant f(x)<1\right\}.$$

令

$$S_1=0\cdot\mu(E_{11})+\frac{1}{2}\mu(E_{12}),$$

现在把区间 $[0, 2)$ 分成 8 个子区间 $\left[0, \frac{1}{4}\right)$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, …, $\left[\frac{7}{4}, 2\right)$，并设 E_{21}, …, E_{28} 是它们在 f 下的逆象。令

$$S_2=0\cdot\mu(E_{21})+\frac{1}{4}\mu(E_{22})+\cdots+\frac{7}{4}\mu(E_{28}).$$

现在，再次把区间 $[0, 3)$ 分成 24 个子区间，作出 S_3，这样继续下去，证明

$$\lim_k S_k=\int_E f.$$

(可以画出图形来了解这一过程是怎样进行的。并证明我们所利用的对实直线所作的特殊的划分，可以更换为其他的划分。)

D. 一个不可测集

35. 实直线上的 Lebesgue 测度可以导出单位圆周 C 上类似的测度(弧长)。任何弧

$$\{e^{i\theta};\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2\}$$

的测度是 $\theta_2-\theta_1$. 对圆周上的子集，总可以作出由可列个圆弧组成的覆盖，求出这些圆弧长度之和，并取其下确界(对所有这种覆盖而取的)，就是这一子集的外测度。如同直线上的 Lebesgue 测度具有平移不变性那样，圆周上的测度具有旋转不变性，即

$$m(e^{i\theta}S)=m(S).$$

设G是由所有点 $e^{in}(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$所组成的集，因为当 n 和 k 是不相同的整数时不可能有 $e^{in}=e^{ik}$，所以这些点 e^{in} 都是不同的。考虑G的各种旋转：

$$e^{i\theta}G=\{e^{i(n+\theta)};n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}.$$

(a) 证明 $e^{i\theta}G=e^{i\psi}G$ 当且仅当 $e^{i(\theta-\psi)}\in G$，即，当且仅当 $\theta-\psi=n+2k\pi$，这里 n 和 k 都是整数。

(b) 证明G有不可列个不同的旋转。

(c) 根据选择公理(附录)，在G的每一个不同的旋转中取出一点组成一个集 S，证明 $e^{in}S$ 是两两不相交的，并且其和是整个圆周：

$$\bigcup_n e^{in}S=C.$$

(d) 由(c)证明 S 是一个不可测集。(提示：由旋转不变性，不同的 $e^{in}S$ 都有相同的测度)。

7.8 Fubini 定理

现在我们讨论数学分析中非常重要的一个定理，它是前面已经讨论过的矩形上的积分可以化为区间上累次积分的推广。即，我们可以每次对一个变量积分：

$$\int_a^b\int_c^d f(x,\ y)\,dx\,dy=\int_a^b\left\{\int_c^d f(x,\ y)\,dy\right\}dx.$$

在第 4 章中，我们曾经对矩形上的连续函数研究过这一结论。对 R^K 上 Lebesgue 可积函数的这一结论——即 Fubini 定理——证明起来却困难得多，但作此努力是有价值的，因为它是一个极其有用的技术工具。

让我们先重新陈述紧支柱上连续函数的基本结论。

定理 19 若 f 是 R^{K+l} 上的一个有紧支柱的连续函数，则

(i) 对每个 $x\in R^K$，函数 $f(x,\cdot)$ 是 R^l 上的有紧支柱的连续函数。

(ii) 由

$$g(x)=\int_{R^l} f(x,\cdot)$$

定义的函数 g 是 R^K 上有紧支柱的连续函数。

(iii)
$$\int_{R^K} g=\int_{R^{K+l}} f.$$

证明 设 B 是某个闭长方体，在 B 外 $f=0$，再应用第 4 章的定理 10 即得证明

为了给出 Fubini 定理，我们将采取不同于通常的叙述形式。我们首先给出结论，然后给出作为证明核心的三个引理。

定理 20 (Fubini 定理) 若 f 是 R^{K+l} 上的可积函数，则

(i) 对几乎所有的 $x\in R^K$，函数 $f(x,\cdot)$ 是 R^l 上的可积函数。

(ii) 对几乎所有的 $x\in R^K$，由

$$g(x)=\int_{R^l} f(x,\cdot)$$

定义的函数 g 是 R^K 上的可积函数。

(iii)
$$\int_{R^K} g=\int_{R^{K+l}} f.$$

注意到其困难在于：若 f 是连续的，则对每一个 x，函数 $f(x,\cdot)$ 在 R^l 上是有定义的，它在 y 的值是 $f(x,y)$。但如果 f 是(仅仅是)可积的，那么就会存在许多这样的点，使得 f 在这些点上没有定义，这样我们就必须证明对 R^K 中几乎所有的 x，$f(x,y)$ 在几乎所有的 $y\in R^l$ 有定义。于是，我们必须了解 R^K，R^l 和 R^{K+l} 中零测度集之间的关系。

引理 1 若 S 是 R^{K+l} 内的零测度集，则对几乎所有的 $x\in R^K$，

截口

$$S_x = \{y \in R^1; (x, y) \in S\}$$

是 R^1 的零测度集。

证明 因为 $m(S)=0$，定理 2 告诉我们，存在一列 R^{K+1} 上的有紧支柱的实值连续函数 $\{f_n\}$，使得

(i) $f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant \cdots$

(ii) 积分序列 $\left\{\int f_n\right\}$ 有界。

(iii) 对每一点 $(x, y) \in S$，$\lim\limits_n f_n(x, y) = \infty$。

对每一个 $x \in R^K$，$\{f(x, \cdot)\}$ 是 $C_C(R^1)$ 内的增加序列。此外，序列在截口 S_x 上每一点 y 的值是发散的。从而(定理 2) 如果我们能够证明对几乎所有的 x

$$\lim_n \int_{R^1} f_n(x, \cdot) < \infty,$$

我们就证明了引理。为此，设

$$g_n(x) = \int_{R^1} f_n(x, \cdot), \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

仿照定理 19 那样，

$$\int_{R^K} g_n = \int_{R^{K+1}} f_n,$$

故

$$\lim \int_{R^K} g_n = \lim \int_{R^{K+1}} f_n < \infty,$$

而 $\{g_n\}$ 是一个增加的序列，这表明

$$\lim_n g_n(x) < \infty, \text{ a.e.}$$

引理证毕。

引理 2 若 $f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant \cdots$ 是 L^1 内的一个单调增加函数序列，并且 Fubini 定理满足，又若极限函数

$$f = \lim_n f_n$$

可积，则 Fubini 定理对 f 也成立。

证明 我们首先将引理 1 应用到由这种点 (x, y) 所组成的集合上去，在这些点 (x, y) 上 $f_n(x, y)$ 不收敛于 $f(x, y)$。我们得知存在一个零测度集 $E\subset R^K$，使得若 $x\notin E$，则对几乎所有的 $y\in R^l$，$f_n(x, y)$ 收敛于 $f(x, y)$。通过 Fubini 定理的(i)，对每个 f_n，都有一个零测度集 $E_n\subset R^K$ 和它相联系：若 $x\in E_n$，则 $f_n(x, \cdot)$ 是 R^l 上的可积函数。并集

$$E\cup E_1\cup E_2\cup\cdots$$

是一个零测度集，因此对几乎所有的 $x\in R^K$，我们有

(a) 对几乎所有的 $y\in R^l$，$\lim_n f_n(x, y) = f(x, y)$。

(b) 对每个 n，$f_n(x, \cdot)$ 是 R^l 上的一个可积函数，

对这样的 x，序列

$$g_n(x) = \int_{R^l} f_n(x, \cdot)$$

(它是有定义的，并且)是一个增加序列。由于 Fubini 定理对每个 f_n 成立，每个 g_n 是在 $L^1(R^K)$ 内以及

$$\int_{R^K} g_n = \int_{R^{K+l}} f_n,$$

所以

$$\lim_n\int_{R^K} g_n = \lim_n\int_{R^{K+l}} f_n < \infty.$$

因为 $\{g_n\}$ 是增加的序列，由单调收敛定理得，对几乎所有的 x 有

(c) $\lim_n g_n(x) < \infty$,

若 $x\in R^K$ 满足条件 (a)(b) 和 (c)，那么单调收敛定理保证了 $f(x, \cdot)$ 是一个可积函数，并且

$$\int_{R^l} f(x, \cdot) = \lim_n \int f_n(x, \cdot)$$
$$= \lim_n g_n(x).$$

我们知道它是一个 x 的可积函数，我们又知道看

$$g(x) = \lim_n g_n(x),$$

那么

$$\int_{R^K} g = \lim_n \int_{R^K} g_n$$
$$= \lim_n \int_{R^{K+l}} f_n = \int_{R^{K+l}} f.$$

引理 3 Fubini 定理对每一个具有紧支柱的有界可测函数成立。

证明 设 f 是有界可测函数，其界为1. 又设 f 有紧支柱．则存在 $C_C(R^{K+l})$ 中的序列 $\{f_n\}$ 几乎处处点态收敛于 f。我们不难约定 f_n 的界也是 1，并且有一个固定的紧集，在此集外每个 f_n 都是 0．我们知道对每个 f_n，Fubini 定理是成立的．Fubini定理对 f 成立的证明实际上与引理 2 的证明相同，只不过要把证明中应用引理 1 和单调收敛定理改为应用引理 1 和有界收敛定理而已。

Fubini 定理的证明．显然，使得 Fubini 定理成立的可积函数族是 $L^1(R^{K+l})$ 的一个线性子空间．因此，只要对非负函数给出证明就可以了．若 f 是 L^1 内的一个非负函数，设

$$f_n = (f \wedge n) k_{K_n},$$

其中 $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots$ 都是紧集，并且它们包含了 R^{K+l} 中所有的点，引理 3 告诉我们，Fubini 定理对每个 f_n 成立，又因为

$$f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant \cdots$$

在 $f(x)$ 有定义的那些 x 上，$\lim_n f_n(x) = f(x)$。

引理 2 说明，Fubini 定理对 f 成立。

系 设 S 是 R^{K+l} 的一个可测子集，则对几乎所有的 $x \in R^K$,

截口

$$S_x = \{y \in R^l; (x, y) \in S\}$$

是 R^l 的一个可测子集，并且

$$m(S) = \int_{R^K} m(S_x)dx.$$

证明 只要把 Fubini 定理应用于 S 的特征函数就可以了。

系 设 S 是 R^K 的一个可测子集，T 是 R^l 的一个可测子集，则直积 $S \times T$ 是 R^{K+l} 的一个可测子集，并且 $m(S \times T) = m(S)m(T)$。

证明 一旦我们证明了 $S \times T$ 是可测的，那么公式 $m(S \times T) = m(S)m(T)$ 由上面的系立即得出。我们把 $S \times T$ 是可测的证明留作习题。

在实际应用中，我们常常用熟悉的记号

$$\int f(x)dx = \int_{R^K} f$$

来表示 f 在整个 R^K 上的 Lebesgue 积分。事实上，我们在引理 1 中已经这样做过。这一记号特别有利于表示 Fubini 的结果：

$$\int\left\{\int f(x, y)dy\right\}dx = \int f(x, y)dx\,dy. \tag{7.32}$$

在后一个积分中我们写出 $dx\ dy$ 来代替 $d(x, y)$。这一记号在 Fubini 定理的证明中是避免的，所以我们必须仔细的想一想每个记号所表示的是什么事。

对于积分的顺序，这里有两点说明，首先，(7.32) 中的顺序是无关紧要的，也就是说，我们完全可以先对 x 求积然后再对 y 求积。其次，记住 Fubini 定理的成立依赖于 f 在 R^{K+l} 上的可积性极其重要。如果 f 仅仅是可测，两个逐次积分可能存在但未必相等。然而可喜的是，当 f 是非负可测函数时却不会发生这样的事，而有关非负函数的结果是一个很有用的工具，用来检验函数在 R^{K+l} 上

的可积性，R^{K+1} 是由 R^K 上的函数和 R^1 上的函数所构成的。

定理 21 (Fubini) 若 f 是 R^{K+1} 上的一个非负可测函数，则

(i) 对几乎所有的 $x\in R^K$，函数 $f(x,\cdot)$ 是可测的。

(ii) 函数

$$g(x)=\int_{R^1} f(x,\cdot),$$

如果我们允许 $+\infty$ 是它的值，那么它是 R^k 上的可测函数。

(iii) $\int_{R^K} g=\int_{R^{K+1}} f$。

证明 为什么在 (ii) 中我们要说"如果允许 $+\infty$ 是它的值"呢？当然，最起码我们是指：由于没有假定 f 可积，因此在不多的几个 x 上，我们可能有

$$\int_{R^1} f(x,\cdot)=\infty.$$

但我们所指的比这更多一些，我们要说的是函数 g 是这样的一个函数，它在 R^k 上几乎处处有定义，它映射到扩充了的非负实数系里去，并且在下面的意义下它是可测的：存在一列具有紧支柱的非负连续函数，几乎处处点态收敛于 g，对于这样一个函数 g，其截断函数 $g\wedge n$ 在通常意义下是可测的，并且单调增加收敛于 g。而单调收敛定理在极限是无限的情形时恰如有限的情形一样，所以

$$\left.\begin{array}{l} f_1\leqslant f_2\leqslant f_3\leqslant\cdots \\ f=\lim\limits_n f_n \\ \lim\int f_n=\infty \end{array}\right\}\Longrightarrow\int f=\infty.$$

这样，在这个拓广意义下，定义非负可测函数的积分就不会有困难了。对这些拓广的非负可测函数的 Fubini 定理的证明如同引理 2 的证明，再加上将我们已知的 Fubini 定理应用于截断函数

$(f\wedge n)k_{K,n}$.

系 设 f 是 R^{K+1} 上的可测函数. 若两个逐次积分

$$\int\left\{\int|f(x, y)|dy\right\}dx,$$

$$\int\left\{\int|f(x, y)|dx\right\}dy,$$

中有一个是有限的,则(它们都是有限的,以及)f 是一个可积函数。

证明 由于 Fubini 定理对 $|f|$ 成立,因为上面两个积分都等于

$$\int|f(x, y)|dx\ dy,$$

这样便得到 f 的可积性,并且另一个逐次积分也是有限的。

例 5 设 f 和 g 都是 R^K 上的可积函数,与 (f, g) 相联系的一个重要的"乘积",称为 f 和 g 的卷积:

$$(f*g)(x)=\int f(x-y)g(y)dy,$$

右端积分是否有意义并不是明显的. 毕竟,两个可积函数的乘积(虽然可测)未必可积. 但我们能够利用第二个 Fubini 定理来证明:给定的 f 和 g, 对几乎所有的 x, 乘积 $f(x-y)g(y)$ 是 y 的一个可积函数。

首先注意到,对任何给定的 f, 函数

$$\tilde{f}(x, y)=f(x-y)$$

是 x 和 y 的可测函数. 即, 它是 $R^K\times R^K$ 上的可测函数. 证明如下, 若 $\{f_n\}$ 是连续函数序列, 它几乎处处点态收敛于 f, 我们证明 $\tilde{f}_n$ 在 $R^K\times R^K$ 上几乎处处点态收敛于 $\tilde{f}$. 若 E 是 R^K 内使得 $f_n(x)$ 不收敛于 $f(x)$ 的那些 x 组成的点集,则在集

(7.33) $$\{(x, y);\ (x-y)\in E\}$$

上，$\tilde{f}_n(x, y)$不收敛于 $\tilde{f}(x-y)$。我们还必须知道，若E是 R^K 中任意一个零测度集，则(7.33)是 $R^{2K}=R^K\times R^K$ 的零测度集，我们把这个证明留作习题。如果证明了这一点，我们就证明了 $\tilde{f}$是R^{2K}上的可测函数，即，$f(x-y)$是 x 和 y 的可测函数。

现在，给定 $L^1(R^K)$中 f 和 g，我们知道

$$h(x, y)=f(x-y)g(y)$$

是 R^{2K} 上的可测函数。我们再利用定理 21 来检验它的可积性，逐次求积 $|h(x, y)|$，先对 x 然后对 y：

$$\int|h(x, y)|dx=\int|f(x-y)||g(y)|dx$$
$$=|g(y)|\int|f(x-y)|dx.$$

显然，

$$\int|f(x-y)|dx=\int|f(t)|dt;$$

此即，平移 $-y$ 并不影响 L^1 范数。(为什么?因为对具有紧支柱的连续函数这是显然的。)于是

$$\int|h(x, y)|dx\,dy=\|f\|_1\int|g(y)|dy=\|f\|_1\|g\|_1,$$

这样便得到 $h\in L^1(R^{2K})$和 $\|h\|_1=\|f\|_1\|g\|_1$。

现在，我们可以利用 Fubini 定理(定理 20)得到：对几乎所有的 x，函数 $f(x-y)g(y)$关于 y 是可积的，函数

$$(f*g)(x)=\int f(x-y)g(y)dy$$

是 R^K 内的一个可积函数，并且

$$\int(f*g)(x)dx=\int f(x-y)g(y)dx\,dy$$
$$=\left(\int f\right)\left(\int g\right).$$

同时，我们知道

$$\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1.$$

L^1 上的卷积算子：

$$(f,\ g) \longrightarrow f*g,$$

它在 Fourier 级数和Fourier积分的理论中起着中心的作用。在这里，我们希望强调指出的是如何应用第二个 Fubini 定理，通过先对 x 然后再对 y 的逐次积分，就清楚地给出了 $f(x-y)g(y)$ 在 R^{2K} 上的可积性。于是，虽然事先并不清楚是不是存在一点 x，使得 $f(x-y)g(y)$ 关于 y 是可积的，但它却告诉我们对几乎所有的 x 这是成立的。

习　题

1. 设 S 是 R^K 内的零测度集，T 是 R^l 内的有界子集。证明直积 $S\times T$ 是 R^{K+l} 内的零测度集。

2. 利用习题 1 的结果证明：若 S 和 T 分别是 R^K 和 R^l 内的子集，如果 S 和 T 中有一个是零测度集，则 $S\times T$ 是零测度集。

3. 设 T 是 R^l 内一个固定的子集，又设 $\mathscr{S}_T$ 是由 R^K 中满足下面条件的所有子集 S 组成的族：$S\times T$ 是 R^{K+l} 的可测子集。证明

(a) $\mathscr{S}_T$ 包含 R^K 中每一个零测度集。

(b) 若 $S\in\mathscr{S}_T$，则余集 R^K-S 也属于 $\mathscr{S}_T$。

(c) 若 $\{S_n\}$ 是 $\mathscr{S}_T$ 内的一个序列，则并 $\bigcup_n S_n$ 也属于 $\mathscr{S}_T$，注意，(b)和(c)表明 $\mathscr{S}_T$ 在可列交之下也是封闭的。

4. 证明，若 S 是 R^K 内任何一个可测集，则存在具有下列性质的集 $\tilde{S}$：

(a) $S\subset\tilde{S}$

(b) $\tilde{S}=\bigcap_n U_n$，其中每个 U_n 是开的(因而它是一列长方体之并集)。

(c) $m(\tilde{S}-S)=0$。

5. 利用习题 3 和 4 的结果证明，若 B 是 R^l 中的一个长方体，则对 R^K 中任何集 S，$S\times B$ 是 R^{K+l} 的可测子集。

6. 利用习题 3，4 和 5 的结果证明，若 S 是 R^K 的可测子集，T 是 R^l

的可测子集，则 $S\times T$ 是 R^{K+l} 的可测子集（显然，它的测度是 $m(S\times T)=m(S)m(T)$）

7. 证明，若 f 是 R^K 上的可测函数，g 是 R^l 上的可测函数，则 $h(x, y)=f(x)g(y)$ 是 R^{K+l} 上的可测函数。（提示：利用习题 2。）

8. 由 7，你是否看出有一个简单的方法来证明两个可测集之直积是可测的。

9. 若 f 是 R^K 上的实值函数，则 f 的图象是 R^{K+1} 内的零测度集。

10. 若 f 是 R^K 上的非负可测函数，则集

$$S=\{(x, y)\in R^{K+1};\quad 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$$

是 R^{K+1} 的可测子集，并且

$$m(S)=\int f.$$

11. 设

$$f(x, y)=\frac{1}{x+y},$$

试问 f 在 $[0, 1]\times[0, 1]$ 上可积吗？如果

$$f(x, y)=\frac{1}{x^2+y^2}$$

又怎样呢？

12. $f(x, y, z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

在立方体 $[0, 1]\times[0, 1]\times[0, 1]$ 上可积吗？

13. 设 $p(x_1, \cdots, x_n)$ 是 n 个变量的多项式，即，R^n 上的多项式函数，又设 N 是 p 的零点组成的集：

$$N=\{x\in R^n;\ p(x_1, \cdots, x_n)=0\}.$$

证明除了 $p=0$ 而外，N 是一个零测度集。（提示：利用 Fubini 定理并关于 n 用归纳法。）

14. 证明几乎所有的 $k\times k$ 矩阵是可逆的。

15. 设 E 是 R^K 的零测度集。证明集

$$S=\{(x, y)\in R^{2K};\quad (x-y)\in E\}$$

是 R^{2K} 内的零测度集。（提示：只要去证明 S 的每个有界部分都具有零测度。除去将集 $x-y=$ 常数用来代替集 $x=$ 常数而外，恰如习题 1 那样处理这样的有界部分。）

16. 证明 $L^1(R^K)$ 上的卷积算子有以下性质。

(i) $(f*g)*h=f*(g*h)$.

(ii) $f*g=g*f$.

(iii) $f*(cg+h)=c(f*g)+f*h$

(iv) 若 f 属于 C^n 类，则对任何 $g\in L^1(R^K)$，$f*g$ 也属于 C^n 类。

17. 若 $f\in L^1(R^K)$，g 是 R^K 上的有界可测函数，则卷积

$$(f*g)(x)=\int f(x-y)g(y)dy$$

是 R^K 上的一致连续函数。

18. 利用习题 17 的结果证明，若 E 是 R^K 内的可测集，并具有正的测度，则代数差集

$$E-E=\{x-y;\,x\in E,\ y\in E\}$$

含有一个非空开集。

*19. 几乎所有的实 $n\times n$ 矩阵有一个实特征值，这句话正确吗？

7.9 正交展开

设 E 是 R^K 的一个固定的可测子集，又设 f 是 E 上可测函数并且 $|f|^2$ 在 E 可积，所有这种函数 f 在自然的方式下构成一个内积空间(Hilbert 空间)。这就有可能将这一空间——我们记它为 $L^2(E)$——中的每个函数展开为相互正交的函数的级数。这种展开可以有多种方式，它依赖于所给的正交函数序列，而这些正交函数序列在数学上都特别的有兴趣。这一节打算对这个重要的概念只作一瞥。我们详细讨论的正交系就是实直线内子集 $E=[-\pi,\pi]$ 上的函数系 e^{inx}，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$。这将完成对 Fourier 级数一般情形的讨论。

记号 设 p 是一个正实数，E 是 R^K 的可测子集。我们记 $L^p(E)$ 是由 E 上所有满足

$$\int_E|f|^p<\infty$$

的可测函数 f 所组成的集。

注意，如果 g 是 E 上的一个非负可测函数，并且$0<p<\infty$，则 g^p 一定也是 E 上的可测函数(见 7.7 节习题 10)，于是 $L^p(E)$ 的定义是有意义的。在$p=1$ 时，它就是我们曾经定义过的 $L^1(E)$。

约定 如同 $L^1(E)$那样，如果 $L^p(E)$ 中的两个函数之差是一个零函数，我们就认为这两个函数是同一个函数。

现在，我们有这样一个事实：对任何 p，$1\leqslant p<\infty$，$L^p(E)$关于 L^p 范数

$$\|f\|_p=\left(\int_E|f|^p\right)^{1/p} \tag{7.34}$$

是一个 Banach 空间。我们不证明这一点，而只证明我们感兴趣的事。

引理 若f 和 g 都是 $L^2(E)$中的函数，则乘积fg属于$L^1(E)$，此外

$$\langle f, g\rangle=\int_E fg^* \tag{7.35}$$

是 $L^2(E)$上的一个内积。

证明 内积所要求的性质是：

(i) $\langle cf_1+f_2, g\rangle=c\langle f_1, g\rangle+\langle f_2, g\rangle$

(ii) $\langle g, f\rangle=\langle f, g\rangle^*$

(iii) $\langle f, f\rangle\geqslant 0$，若$\langle f, f\rangle=0$，则 $f=0$。

在第 6 章中，我们看到任何内积还满足 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$|\langle f, g\rangle|^2\leqslant\langle f, f\rangle\langle g, g\rangle.$$

它的(标准的)证明如下：注意到对任何复数 c，

$$\begin{aligned}0\leqslant\|f+cg\|_2^2&=\langle f+cg, f+cg\rangle\\&=\langle f, f\rangle+c\langle g, f\rangle+c^*\langle f, g\rangle+|c|^2\langle g, g\rangle.\end{aligned}$$

选取 c，使得最后两项之和为 0：

$$\langle f, g\rangle+c\langle g, g\rangle=0.$$

除去 $g=0$，这总是办得到的。(若 $g=0$，我们要证明的不等式是平凡的)。将此 c 的值代入不等式

$$0\leqslant\|f+cg\|_2^2$$

就得到 Cauchy–Schwarz 不等式。

由此我们知道在 $L^2(E)$ 的任何一个使得(7.35)有意义的子空间上有

$$\left|\int fg^*\right|^2\leqslant\int|f|^2\int|g|^2. \tag{7.36}$$

例如，我们知道，对由具有紧支柱的有界可测函数组成的 $L^2(E)$ 的子空间(7.36)成立。再由单调收敛定理以及在这一子空间中

$$\left(\int|f|\,|g|\right)^2\leqslant\int|f|^2\int|g|^2,$$

便立即得到：对所有 $f, g\in L^2(E)$，有 $(fg)\in L^1(E)$。

最后还要讨论的一个非主要之点就是内积条件(iii)，由上面知道

$$\langle f, f\rangle=\int ff^*=\int|f|^2\geqslant 0$$

以及若 $\langle f, f\rangle=0$ 则 $f=0$。由于我们已经约定零函数等于 0，所以这最后的结论是合理的。

定理 22 (Riesz-Fischer) $L^2(E)$ 是一个 Hilbert 空间，即，完备的内积空间。

证明 由 Cauchy–Schwarz 不等式和

$$\|f\|_2=(\langle f, f\rangle)^{1/2}$$

立即得到三角不等式

$$\|f+g\|_2\leqslant\|f\|_2+\|g\|_2.$$

于是，我们要证明的就是 $(L^2, \|\cdots\|_2)$ 是一个 Banach 空间。考虑 $L^2(E)$ 中一个快速 Cauchy 序列：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n-f_{n+1}\|_2=M<\infty.$$

我们要证明$\{f_n\}$收敛。设$g_n=f_n-f_{n-1}$，($f_0=0$)，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|g_n\|_2=M<\infty.$$

我们要证明的是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}g_n$$

在$L^2(E)$内收敛．设

$$h_n=\sum_{j=1}^{n}|g_j|,$$

故$h_n\in L^2(E)$，$0\leqslant h_1\leqslant h_2\leqslant h_3\leqslant\cdots$，并且(由三角不等式)

$$\|h_n\|_2\leqslant\sum_{j=1}^{n}\|g_j\|_2\leqslant M,$$

于是

$$0\leqslant h_1\leqslant h_2\leqslant h_3\leqslant\cdots$$

$$\int_E h_n^2\leqslant M^2$$

由此得(单调收敛定理)

$$h(x)=\lim_n h_n(x)<\infty,\ \text{a.e.}$$

$$h\in L^2(E),$$

$$\int_E h^2=\lim_n\int_E h_n^2.$$

在任何点x，当$h(x)<\infty$时，级数$\Sigma g_n(x)$必绝对收敛。如果我们设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x),\ \text{a.e.}$$

那么，由于

$$f_n=\sum_{j=1}^{n}g_j$$

$$|f_n| \leqslant h_n \leqslant h,$$

我们看到 $f \in L^2(E)$ 和 $|f| \leqslant h$。又由于 f 和 f_n 都被 h 所控制，我们有

$$|f - f_n|^2 \leqslant 4h^2$$

$$\lim_n f_n(x) = f(x), \text{ a.e.}$$

所以，由控制收敛定理

$$\lim_n \int |f - f_n|^2 = 0.$$

在讨论级数展开的相当多的类型中，L^2 的完备性是很有用的。在数学和物理的许多重要问题中，我们会遇见将 L^2 中的函数展开为正交函数的级数。

定义 设 $\{f_n\}$ 是 $L^2(E)$ 中的一个序列。如果

$$\langle f_n, f_K \rangle = 0, \ n \neq K,$$

我们就称它为**正交序列**。又如果

$$\langle f_n, f_K \rangle = \delta_{nK} = \begin{cases} 1, & n = K, \\ 0, & n \neq K, \end{cases}$$

我们就称它是**标准正交序列**。

如果我们有一个正交序列 $\{f_n\}$，并且每个 $f_n \neq 0$，我们只要把每个 f_n 用它的范数除，就可以把这一正交序列变换为标准正交序列。于是，这两个概念只有一丝儿差别。我们可以这样认为：当我们讨论正交序列时，我们同样认为它是标准化的，故每一个这种函数的范数是 1。

例 6 一个最重要的正交序列是由区间 $E = [-\pi, \pi]$ 上的三角函数给出的：

$$f_n(x) = e^{inx}, \ n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \cdots .$$

这里，按照标准化的习惯使得 E 具有测度 1，这意味着在内积中将吸取一个因子 $(2\pi)^{-1}$：

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)^* dx.$$

例 7 Legendre 多项式 P_n 具有以下性质：

(i) P_n 是一个 n 阶多项式($n=0, 1, 2, \cdots$)，

(ii) $\{P_n\}$是区间$[-1, 1]$上的正交序列.

由这些条件可以确定 P_n,(不超过一个常数因子),并且它们是：

$$P_0(x)=1,$$

$$P_n(x)=(2^n n!)^{-1}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, n\geqslant 1.$$

引理 若$\{g_n\}$是$L^2(E)$内一个线性无关的序列，则存在唯一的正交序列$\{f_n\}$，使得对每个 n，f_n 是 g_1，…，g_n 的线性组合.

证明 序列$\{f_n\}$可以一个接一个的构造如下：设

$$f_1=\frac{1}{\|g_1\|_2}g_1.$$

当 f_1，…，f_{n-1} 被找出之后，设

$$f_n=\frac{1}{\|h_n\|_2}h_n,$$

其中

$$h_n=g_n-\sum_{K=1}^{n-1}\langle g_n, f_K\rangle f_K.$$

引理中的这一过程能够使我们构造出非常多的正交序列. 例如，在任何有界集E上，我们可以将这一过程应用到多项式函数序列 $1, x, x^2, \cdots$上去,Legendre 多项式就是在 $E=[-1, 1]$上应用这一过程的结果.

定理 23 设$\{f_n\}$是$L^2(E)$内的一个正交序列，则下列陈述等价(同时成立或同时不成立).

(i) 若 $h\in L^2$ 并且对一切 n 有$\langle h, f_n\rangle=0$，若 $h=0$.

(ii) 对每个 $f\in L^2$，

$$f=\sum_n \langle f, f_n\rangle f_n,$$

（级数在 L^2 中收敛）。

(iii) 对每一个 $f \in L^2$,

$$\|f\|_2^2=\sum_n |\langle f, f_n\rangle|^2.$$

证明 设 $\{f_n\}$ 是任意一个正交序列，又设 $f \in L^2(E)$。令

$$c_K=\langle f, f_K\rangle,$$

$$g_n=\sum_{K=1}^n c_K f_K.$$

注意到

$$\langle g_n, f\rangle=\langle \sum_K c_K f_K, f\rangle$$

$$=\sum_{K=1}^n c_K\langle f_K, f\rangle.$$

因为

$$\langle f_K, f\rangle=\langle f, f_K\rangle^*=c_K^*,$$

我们有

$$\langle g_n, f\rangle=\sum_{K=1}^n |c_K|^2.$$

由正交关系 $\langle f_n, f_K\rangle=\delta_{nK}$，容易求得

$$\|g_n\|_2^2=\sum_{K=1}^n |c_K|^2.$$

这样就有

$$\begin{aligned}\|f-g_n\|_2^2&=\langle f-g_n, f-g_n\rangle\\&=\langle f, f\rangle-\langle g_n, f\rangle-\langle f, g_n\rangle+\langle g_n, g_n\rangle\\&=\langle f, f\rangle-\sum_{K=1}^n |c_K|^2.\end{aligned}$$

于是我们得到 **Bessel** 不等式：

$$\sum_{K=1}^n |c_K|^2 \leqslant \|f\|_2^2,$$

$$c_K = \langle f, f_K \rangle.$$

因为它对任何 n 成立，所以

$$\sum_{K=1}^{\infty} |c_K|^2 \leqslant \|f\|_2^2.$$

现在，我们可以验证 $\{g_n\}$ 是 $L^2(E)$ 中的 Cauchy 序列。

$$\|g_n - g_N\|_2^2 = \sum_{K=N+1}^{n} |c_K|^2, \ n > N,$$

$$\lim_N \sum_{K=N+1}^{\infty} |c_K|^2 = 0.$$

因为 L^2 是完备的，故存在 $g \in L^2$ 使得

$$\lim \|g - g_n\|_2 = 0,$$

亦即级数

$$g = \sum_1^{\infty} c_n f_n$$

在 L^2 中收敛。设

$$h = f - g.$$

验证下面的等式是一件简单的事：

$$\|h\|_2^2 = \|f - g\|_2^2 = \lim_n \|f - g_n\|_2^2$$

$$= \|f\|_2^2 - \sum_{K=1}^{\infty} |c_K|^2 = \|f\|_2^2 - \|g\|_2^2.$$

类似地对所有 n，有

$$\langle h, f_n \rangle = 0.$$

所有这些对任何正交序列都是成立的。现在，考察定理中所叙述的性质(i)，(ii)，(iii)。性质(i)是说，对每一个 $f \in L^2$，对应的 h 是 0。性质(ii)是说，对每一个 $f \in L^2$，对应的 g 等于 f。性质(iii)是说，对每一个 $f \in L^2$。$\|f\|_2 = \|g\|_2$。这清楚地表示，对于序列$\{f_n\}$，它们都是等价的性质。

定理 23 告诉我们什么呢？对一个正交序列$\{f_n\}$，如果在 L^2中

只有唯一的元素 0 和每个 f_n 正交，我们就称这个正交序列 $\{f_n\}$ 是**完全的**。这样，我们就知道，若 $\{f_n\}$ 是 L^2 中的一个完全的正交序列，那么 L^2 中的每个 f 能够展开为一个级数

$$f=\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n,$$

它在 L^2 范数下收敛于 f。其展开式中的系数是：

$$\begin{aligned} c_n &= \langle f, f_n\rangle \\ &= \int_E f f^*_n. \end{aligned}$$

而函数 f_n 如同互相正交的单位向量，系数 c_n 就是坐标，这多么象欧几里德空间啊。范数可以利用坐标来计算：

$$\|f\|_2^2=\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2.$$

事实上，若

$$g=\sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n,$$

则

$$\langle f, g\rangle=\sum_{n=1}^{\infty} c_n b^*_n.$$

读者已经知道三角函数的序列

$$f_n(x)=e^{inx},\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

在 $L^2[-\pi, \pi]$ 内是完全的。假定又知道以下形式的Weierstrass逼近定理，(第 5 章定理 24 第 3 个系)：设 g 是$[-\pi, \pi]$ 上的连续函数，并且 $g(-\pi)=g(\pi)$，则 g 能够用三角多项式

$$P(x)=\sum_{K=-n}^{n} a_K e^{iKx}$$

一致逼近。如果已经知道这一点，设 $h\in L^2$ 并且 h 的 Fourier 系数都是 0：

$$\int_E h f^*_n=0,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

由Weierstrass定理，对任何连续函数 g 并且$g(-\pi)=g(\pi)$，就有：

$$\int_E hg=0.$$

再利用点态有界逼近和控制收敛定理，那么对任何有界可测函数 g，有

$$\int_E hg=0.$$

现在，选取一个有界可测函数序列 g_n，使得

$$|g_n|\leqslant|h|$$

$$g_n\longrightarrow h^*,\ \text{a.e.}$$

我们便得到

$$\int_E hh^*=0;$$

所以 $h=0$。

定理 24 设 $f\in L^2(-\pi,\pi)$，f 的 Fourier 系数定义为

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx,$$

那么 Fourier 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$$

的部分和在 L^2 范数下收敛于 f，并且

$$\sum_n|c_n|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx$$

若

$$\{c_n\},\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

是任何一个复数序列，它是平方可和的：

$$\sum_n|c_n|^2<\infty,$$

则存在一个(唯一)函数 $f\in L^2$，使得$\{c_n\}$为 f 的 Fourier 系数序列。

我们同样可以将 $L^2(-1, 1)$ 内的每一个函数，利用例 7 的 Legendre 多项式将它展开为一个级数。 这些多项式的完全性可以和我们已经证明过的三角函数那样，利用通常的多项式逼近的 Weierstrass定理来证明它。还有许多其他的完全的正交多项式也是重要的：Laguerre 多项式，Hermite 多项式等等，这种级数的展开能够用来解决许多问题，现在我们讨论其中的一个问题——解积分方程。

例 8 设 g 是$[a,b]$上的连续函数，K 是正方形$[a,b]\times[a,b]$上的连续函数，我们求方程

$$g(x)=f(x)+\int_a^b f(t)K(x,\ t)dt$$

的解 f。在 $L^2(a,\ b)$中有一个与核K相联系的完全正交序列。核 K定义了一个从 $L^2(a,\ b)$到 $L^2(a,\ b)$内的映射：

$$(Tf)(x)=\int_a^b f(t)K(x,\ t)dt,\ f\in L^2,$$

实际上，Tf 是一个连续函数，所以

$$L^2(a,\ b)\xrightarrow{T}C(a,\ b).$$

注意到T是一个线性变换

$$T(cf_1+f_2)=cTf_1+Tf_2.$$

设K是实值的并且是对称的：

$$K(t,\ x)=K(x,\ t),$$

能够证明在 $L^2(a,\ b)$中存在一个完全的正交序列$\{f_n\}$，使得每个 f_n 是变换 T 的特征向量：

$$Tf_n=\lambda_n f_n,\ (\lambda_n\in R).$$

这些 λ_n 并非都不相同。

假如有了这么一个序列$\{f_n\}$，下面描述如何去解积分方程：

$$g(x)=f(x)+(Tf)(x),$$

我们是这样做的，展开

$$g=\sum_n a_n f_n,$$

并且方程的解 f 是

$$f=\sum_n c_n f_n,$$

其中

$$a_n=c_n+\lambda_n c_n.$$

也就是

$$c_n=a_n(1+\lambda_n)^{-1}.$$

但如果对某个 n，$\lambda_n=-1$ 就不能这样做了。在 $K\geqslant 0$ 这一非常重要的情形中，那就没有什么困难了，这是因为可以证明

$$\lambda_n\geqslant 0,$$

$$\lim_n \lambda_n=0.$$

于是，对任何 $g\in L^2(a, b)$，可以用上述方法来解方程。

习　题

1. 证明 Legendre 多项式（例 7）组成 $L^2(-1, 1)$ 中的一个完全的正交序列。

2. 若 f 和 g 都在 $L^2(-\pi, \pi)$ 内，将它们扩张为整个实轴上周期是 2π 的周期函数。证明卷积

$$(f*g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,dt$$

在 $L^1(-\pi, \pi)$ 内，并且它的 Fourier 系数 c_n 由

$$c_n=a_n b_n$$

给出，其中 a_n 和 b_n 分别是 f 和 g 的第 n 次 Fourier 系数。

3. 假设在第 6 章中的

$$\|x\|_p=(|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p)^{1/p},\ 1\leqslant p<\infty$$

是 R^n（或 C^n）上的一个范数（满足三角不等式）。利用它证明若 f 和 g 都是简单函数，则

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

然后证明这一不等式对一切非负可测函数成立，于是$\|\cdots\|_p$是 L^p 上的一个范数。

4. 证明 $L^p(E)$是完备的，$1 \leqslant p < \infty$，(提示：可以把对 L^2 的证明同样的应用于 L^p)。

5. 若 $f \in L^2(-\pi, \pi)$，证明

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(\theta - t)dt$$

定义了单位开圆盘$\{z \in C; |z| < 1\}$上的一个调和函数。并且这一函数是复解析的当且仅当 Fourier 系数

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

在 $n < 0$ 时都是 0。(P_r 是第 5 章中的 Poisson 核。)

6. 若 f 是有界可测函数，定义

$$\|f\|_\infty = \inf_g \sup |g|,$$

其中 g 是遍历所有与 f 几乎处处相同的函数。证明

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p.$$

第8章 可微映射

我们将讨论从一个 Euclid 空间到另一个 Euclid 空间内的映射的微分。首先回顾一下我们所需要的有关线性变换和偏导数的一些基本事实。

8.1 线性变换

从一个 Euclid 空间到另一个 Euclid 空间内的最简单的一类(可微)映射由线性变换 T

$$T(cx+y)=cT(x)+T(y).$$

所组成，我们曾经在一些例题和习题中常常遇到这种映射。它们在本章的进展中将起着中心的作用。让我们概括一下它们的基本性质。

设 n 和 k 都是正整数，我们将用记号 $L(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^k)$ 表示从 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^k$ 内的所有线性变换所组成的向量空间。关于线性变换

$$R^n \xrightarrow{T} R^k$$

的最基本事实是：T 被它在 n 个线性无关的向量 $x_1, \cdots, x_n$ 上的值所唯一确定：

$$x=c_1x_1+\cdots+c_nx_n,$$

$$T(x)=c_1T(x_1)+\cdots+c_nT(x_n).$$

特别的，T 被它在标准基向量 $e_1=(1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n=(0, \cdots, 0, 1)$ 上的值所确定。设

(8.1) $\qquad T(e_j)=(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{kj}), \quad j=1, \cdots, n.$

$k\times n$ 矩阵

$$A=[a_{ij}]\quad 1\leqslant i\leqslant k,\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

称为T的**标准表示矩阵**。方程组(8.1)连同T的线性给出了在T作用下的明显表达：

$$y=T(x),$$

(8.2) $$Ax^t=y^t.$$

在(8.2)中，x^t是x的转置，亦即：它是一个$n\times 1$矩阵，是n维列向量。(8.2)的第二个方程表示：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix},$$

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j.$$

没有必要对转置保留所写的那个"t"，只要记住$y=T(x)$对应于$y=Ax$，而在第二个方程中y和x都是列向量。

从R^n到R^k内的任何映射是(或者，能够是)由R^n上的k个实值函数所表达：

$$R^n\xrightarrow{T}R^k,$$

(8.3) $$y=T(x),$$

$$y_1=f_1(x_1,\ \cdots,\ x_n),$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots$$

$$y_k=f_k(x_1,\ \cdots,\ x_n).$$

函数f_i是由"$f_i(x)$是$T(x)$的第i个坐标"所定义的。换句话说，f_i是复合$f_i=\pi_i\circ T$，这里π_i是R^k上第i标准坐标函数：

$$\pi_i(y)=y_i.$$

(8.3)中的映射T是线性的当且仅当每个f_i是线性的(一个线性

泛函)。

若f是R^n上的线性泛函，则f具有形式：

(8.4) $$f(x)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n,$$

其中a_1, …, a_n是某些固定的实数。矩阵$[a_1, \cdots, a_n]$是线性泛函f的标准表示矩阵。通常把它看成向量$a=(a_1, \cdots, a_n)$，那么

(8.5) $$f(x)=\langle a, x\rangle,$$

或者按照内积(或·积)的记号

$$f(x)=a\cdot x。$$

刚才回忆了关于描述一个线性变换T的两种标准途径。它是由R^n内的标准基向量的象唯一确定的，写出表示矩阵A的第j列就得到e_j在T作用下的象。变换T亦可以由R^n上的k个线性泛函：$T=(f_1, \cdots, f_k)$所确定，f_i的形式是：

$$f_i(x)=\langle a_i, x\rangle,$$

这里a_i是标准矩阵A的第i行。

接下来，我们将要谈到R^n上的仿射变换。一个从R^n到R^k内的仿射变换是一个映射

$$R^n \xrightarrow{F} R^k,$$

它具有形式

$$F(x)=y_0+T(x),$$

这里y_0是R^k内的一个固定向量，以及$T\in L(R^n, R^k)$。于是一个仿射变换是一个线性变换加一个平移。线性变换都是仿射变换，它把0变成0。考虑实直线上的一个实值函数：

$$R \xrightarrow{f} R,$$

说f是仿射的意味着f的图象是直线，说f是线性的意味着f的图象是经过原点的直线。

8.2 偏 导 数

关于微分的一些定义和事实，在第4章中你已经熟悉了。为方便起见，我们在这儿回顾一下。设f是一个定义在R^n内某个开集上的实值函数，f的偏导数(如果存在)是

(8.6) $$(D_i f)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}.$$

我们也用$\partial f/\partial x_1$, …, $\partial f/\partial x_n$来记$D_1 f$, …, $D_n f$，这种记号看来是有用的。我们说函数f是开集U上的C^1类函数，是指$D_1 f$, …, $D_n f$在U上存在且连续。

若f有偏导数，我们要问它是否可微。二阶偏导数(若它存在)

$$D_i(D_j f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

记为$D_{i,j}f$。许多最基本的定理中的一个是，若$D_{i,j}f$和$D_{j,i}f$存在并且连续，则

(8.7) $$D_{i,j}f = D_{j,i}f,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

函数f是开集U上的C^K类函数是指所有K阶偏导数

(8.8) $$D_{i_1, \cdots, i_K} f = D_{i_1} D_{i_2} \cdots D_{i_K} f = \frac{\partial^K f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_K}}$$

在U上存在且连续。C^∞类函数是指对一切K，它是C^K类的。为了处理高阶导数，利用向量足标是方便的。若i_1, …, i_K是1与n之间的正整数，我们令$i = (i_1, \cdots, i_K)$以及

(8.9) $$D_i f = D_{i_1, \cdots, i_K} f.$$

注意每一个微分算子D_1, …, D_n是从C^1类函数到连续函数内的一个线性变换

$$C^1(U) \xrightarrow{D_j} C(U),$$

当然，我们也有

$$C^k(U)\xrightarrow{D_j}C^{k-1}(U).$$

二阶微分算子

$$C^k(U)\xrightarrow{D_{i,j}}C^{k-2}(U)$$

事实上是复合 $D_{i,j}=D_i\circ D_j$：

$$\begin{array}{ccc} C^{k D_j} & \longrightarrow & C^{k-1} \\ & \searrow & \downarrow D_i \\ D_{ij} & & C^{k-2} \end{array}$$

更一般的，(8.8)表示若 $i=(i_1,\cdots,i_k)$，

则 D_i 是线性变换 $D_{i_1},\cdots,D_{i_k}$ 的复合。

偏导数(8.6)的概念是方向导数的一个特殊情形。导数 $(D_jf)(x)$是用 f 在 x 点沿通过 x 且与 j 轴平行的直线上的改变量之比率来计算的，而沿其它直线的改变量之比率也同样重要。若 v 是 R^n 内的任意向量，则 v 确定了一条通过原点的直线——由 v 张成的一维子空间。如果将这条直线平移使它通过 x，我们就得到直线

$$L=\{(x+tv);t\in R\},$$

并且我们能够试一试在 x 沿 L 微分 f：

$$(8.10)\qquad (D_vf)(x)=\lim_{t\to0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}.$$

导数$(D_vf)(x)$不仅依赖于直线 L 而且还依赖于向量 v。这是因为在(8.10)中我们利用了一个标量和 L 上依赖 v 的方向，并把 v 当作单位。有时我们也可以马马虎虎地把 $(D_vf)(x)$ 当作 f 在 x 沿方向 v 的导数；但是，我们不想这样做，这是因为 D_vf 依赖于 v 的长度以及它的方向。如果我们设

$$w=\frac{1}{|v|}v,$$

则 w 是单位向量，它和 v 有相同的方向。这样就可以恰当地称 $(D_wf)(x)$是 f 在 x 沿向量 v 的方向导数。当然，

$$D_w f = \frac{1}{|v|} D_v f.$$

它是当 $D_v f$ 是 v 的线性函数时的一个特殊情形（譬如说，若 f 是 C^1 类的一个固定的函数）。对固定的 v，则 D_v 是一个线性变换

$$C^1(U) \xrightarrow{D_v} C(U),$$

以及

$$D_{av_1+v_2} = aD_{v_1} + D_{v_2}.$$

特别的，若 $v = (v_1, \cdots, v_n)$，则

$$D_v = v_1 D_1 + \cdots + v_n D_n,$$

(8.11) $$D_v f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}, \ f \in C^1.$$

若 f 是开集 U 上的 C^1 类函数，f 的**梯度**是

(8.12) $$f' = (D_1 f, \cdots, D_n f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

注意：f 是从 U 到 R^n 内的一个（连续）映射。按照(8.11)，梯度满足

$$D_v f = \langle v, f' \rangle = v \cdot f'.$$

在任何点 x，向量 $f'(x)$ 给出了这样一个方向，沿着它 f 增加最快。

R^n 上每一个（实值）仿射函数是 C^∞ 类的，更一般的，每个多项式

(8.13) $$f(x) = \sum_{i_1, \cdots, i_n = 0}^{N} a_{i_1, \cdots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

是 C^∞ 类的。仿射函数都是 1 阶（或 0 阶）多项式。重新利用向量足标能够让我们把(8.13)写为

$$f(x) = \sum_{|i|=0}^{N} a_i x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} = \sum_{|i|=0}^{N} a_i x^i.$$

我们曾经利用 $|i|$ 表示向量指标 i 的权或阶：

$$|i| = i_1 + \cdots + i_n.$$

它给出了 x^i 的阶，但它会和 R^n 中向量 i 的 Euclid 长度相混淆。不过当大家约定好以后，再用它来解决问题就不会引起混乱。系数 a_i 由

$$a_i = \frac{1}{i!}(D_i f)(0)$$

给出，其中 $i! = i_1! \cdots i_n!$。

假设你已经知道 Taylor 定理，其兴趣在于试图用多项式逼近一个光滑函数。我们将要应用的这个定理的形式本身就说明了这一点。设在点 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 的一个凸邻域 U 上，f 是 C^{k+1} 类函数，则

$$f(x) = \sum_{|i|=0}^{k} \frac{1}{i!}(D_i f)(a)(x-a)^i + R_k(x),$$

其中余项 $R_k(x)$ 由下式给出

$$R_k(x) = (K+1)\sum_{|i|=k+1} \frac{(x-a)^i}{i!} \cdot \int_0^1 (D^i f)(a+t(x-a))(1-t)^k dt.$$

在 U 上 C^∞ 类函数中有一个特殊的集，它是由 U 上所有实解析函数组成的，这些函数在每一点 $a \in U$，能展开为一个收敛的幂级数

$$f(x) = \sum_{|i|=0}^{\infty} c_i (x-a)^i. \tag{8.14}$$

若 f 是 U 上的实解析函数，又若 a 是 U 的一点，则 (8.14) 中的系数 c_i 是唯一确定的。它们是

$$c_i = \frac{1}{i!}(D_i f)(a),$$

并且存在关于 a 的最大的对称 n 维立方体：

$$B = \{x; |x_i - a_i| < \varepsilon, i = 1, \cdots, n\},$$

在其中级数 (8.14) 收敛。

记住实解析函数都是非常特殊的，以后我们将经常在 C^k 和 C^∞

类里开展工作。

8.3 可微函数

何谓 R^n 上的可微函数呢？我们能够把它定义为这样一种函数 f，它的偏导数 D_1f，…，D_nf 都存在。但这样定义具有不少困难。第一，仅仅 $(D_1f)(x)$，…，$(D_nf)(x)$ 存在，并不能保证 f 沿其他向量的方向也可导。（若 D_1f，…，D_nf 存在并且在整个开集 U 上连续，那么方向导数就没有困难了）。第二，凡依赖于坐标特殊选取的数学定义，其中大多数在某些关键之处会引起概念的困难。第三，怎样的定义将起着 f 的导数的作用？最好是"可微"意味着"导数"存在。

针对上述第一和第二，作为在 x 可微的要求，应该对 R^n 中的每个向量 v，$(D_vf)(x)$ 存在——在任何方向可导。聪明的读者会猜测到这并不完全满足所须的要求。假定所有方向导数都存在，但公式

$$(D_vf)(x) = v_1(D_1f)(x) + \cdots + v_n(D_nf)(x)$$

并不成立，这就产生了缺陷。我们必须要求 (D_vf) 是 v 的线性函数，所以，我们能够说：如果每一个方向导数 $(D_vf)(x)$ 存在并且 (D_vf) 是 v 的线性函数，则 f 在 x 可微。然后，什么将起着 f 的导数的作用？回答是：线性泛函 l：

$$l(v) = (D_vf)(x)$$

将是 f 在 x 的导数。

现在，我们重新从"何谓可微？"开始，并且从几何的观点来考察。我们将在更为整齐的形式中，回到我们刚才已经达到的相同结论。

设 f 是一个实值函数，定义在实直线的某一区间上。若 x 是此区间的一点，导数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(如果它存在)是 f 的图象在 x 的切线斜率。事实上，切线的定义包含着弦的极限——这一极限是 $f'(x)$ 的定义的几何解释。切线具有方程

$$y(t)=f(x)+(t-x)f'(x),$$

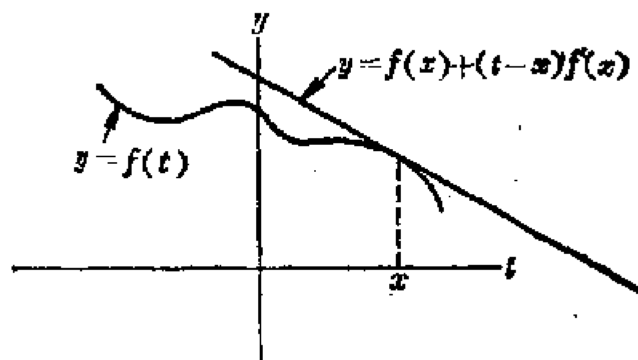


图 28

它是一条在 x 附近"最佳逼近"f 的直线。(见图28)，其意义(确切地)是指什么呢？这意味着，假设我们寻求一个仿射函数

$$a(t)=b(t-x)+c$$

在 x 点附近逼近 $f(t)$ · 如果我们要求

$$\lim_{t\to x}[f(t)-a(t)]=0,$$

其中常数必须选取为 $f(x)$。若我们取 $c=f(x)$ 和 $b=f'(x)$，那么我们得到

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-a(t)}{t-x}=0,$$

即，当 t 趋于 x 时 $f(t)-a(t)$ 比 $t-x$ 更快地趋于 0。

通常把上面的论述方便地表达为：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

(8.15) $$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+R(h;x),$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}R(h;x)=0.$$

若 x 在讨论中是固定的，分析学家经常把(8.15)写成：

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+o(h),$$

这里 $o(h)$ 是 h 的函数的一个一般表示，它比 h 更快地趋于 0（当 h 趋于 0 时）。在同一个讨论中，小"oh"可能表示许多不同的函数。

$$h^2=o(h),$$

$$h^5=o(h),$$

$$h\neq o(h).$$

这一记号的要点是：在一个逼近问题中，例如我们曾经讨论过的象(8.15)那样的逼近中，我们并不认真的关心余项 $R(h;x)$ 是什么，我们所关心的是这样一个事实：

$$R(h;x)=o(h).$$

现在，让我们回到多变量函数的情形：

$$U\longrightarrow R,\quad U\subset R^n.$$

固定 U 内一点 x，f 在 x 的可微性对应着 f 的图象在点 $(x, f(x))$ 的切"平面"的存在性。如同图 29 所指出的，切"平面"实际上是 n 维的——R^{n+1} 内的超平面——它由一个仿射函数所定义

$$y=a(t)=c_0+a_1t_1+\cdots+a_nt_n,$$

因为我们要求这一超平面通过点 $(x, f(x))$，这样就可以相当方便地把这一仿射函数写为

$$a(t)=c+b_1(t_1-x_1)+\cdots+b_n(t_n-x_n)=c+l(t-x).$$

这里 l 是一个线性函数。显然，我们必须取 $c=f(x)$。当我们说能够找到某个超平面

$$y=f(x)+l(t-x),$$

它与 f 的图象在 $(x, f(x))$ 相切，这是什么意思呢？

对相切的几何意义经过一段酝酿之后，我们最后同意这是指超平面一阶逼近图象。即：（当 t 趋于 x 时）$f(t)-a(t)$ 比 $t-x$

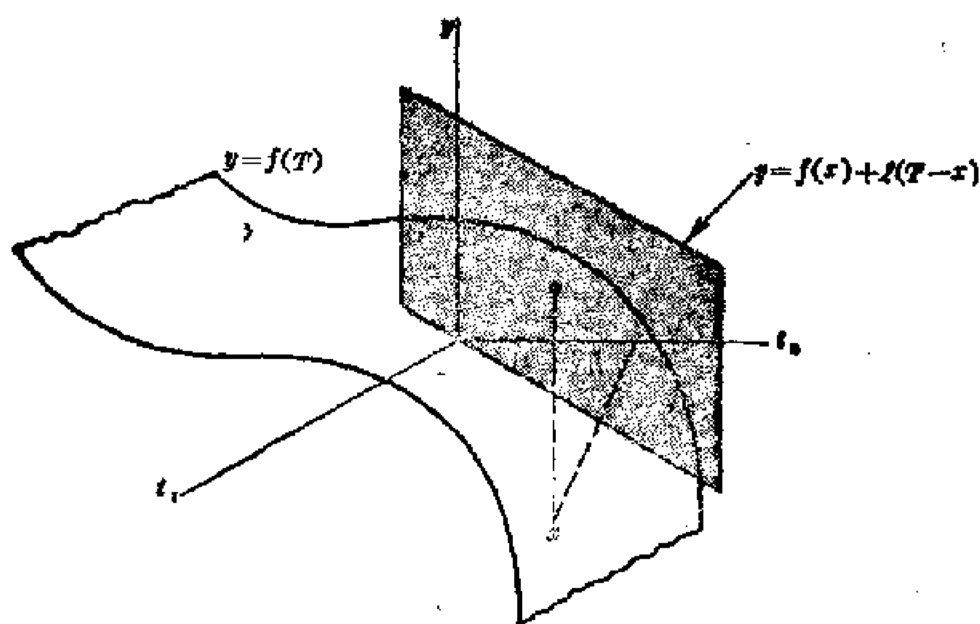


图 29

更快地趋于0。我们可以通过许多途径将它解析地表示为：

(i) $$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-a(t)}{|t-x|}=0,$$

(ii) $$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)-l(t-x)}{|t-x|}=0,$$

(iii) $$f(x+h)=f(x)+l(h)+R(x;h),$$

这里

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{|h|}R(x;h)=0,$$

(iV) $$f(x+h)=f(x)+l(h)+o(h).$$

在(iV)中，$o(h)$表示$o(|h|)$。

定义 设f是R^n内某开集U上的实值函数，又设x是U的一点。若在R^n上存在一个线性泛函l，使得

(8.16) $$f(x+h)=f(x)+l(h)+o(h),$$

就称函数f **在x可微**。

有一个简单的事实我们必须验证一下，即：若f在x可微，则(8.16)中的线性泛函l是唯一的。我们考察如下，设我们又有

$$f(x+h)=f(x)+l_1(h)+o(h),$$

相减后，我们得到

(8.17) $$l(h)-l_1(h)=o(h).$$

注意到$o(h)$不是一个具体的函数，但它是h的函数的一个一般记号，当h趋于0时它比h更快地趋于0。如果忘记了这一点，你将会得到一个含混的结论

$$o(h)-o(h)=o(h).$$

我们要由(8.17)推导出$l=l_1$，我们就必须证明若λ：

$$\lambda(h)=a_1h_1+\cdots+a_nh_n$$

是R^n上的一个线性泛函，并且$\lambda(h)=o(h)$，则$\lambda=0$。这是相当容易证明的。

定义 若f在x可微，则称(8.16)中的线性泛函l是f**在**x**的导数**，记为$(Df)(x)$：

$$l=(Df)(x).$$

定理1 若f在x可微，并且$l=(Df)(x)$，则f在x的所有方向导数存在，并且

$$(D_vf)(x)=l(v),\quad v\in R^n.$$

证明 设v是R^n内的非0向量。我们需要证明

(8.18) $$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}=l(v).$$

因f在x可微，所以

(8.19) $$f(x+tv)=f(x)+l(tv)+o(tv).$$

又因v是固定的非0向量和$|tv|=|t||v|$、$o(tv)$可以用$o(t)$代替。而l是线性的，$l(tv)=tl(v)$。由(8.19)我们有

$$\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}=l(v)+\frac{1}{t}o(s)=l(v)+o(1).$$

这说明什么呢？它表明(8.18)是正确的。

定理1的一个特殊的推论是：偏导数 $(D_1f)(x), \cdots, (D_nf)(x)$ 存在，并且

$$(D_jf)(x) = l(e_j).$$

于是对 R^n 中的每个向量 v，我们有

$$l(v) = v_1(D_1f)(x) + \cdots + v_n(D_nf)(x).$$

换句话说，$(Df)(x)$ 是一个线性泛函："与梯度 $f'(x)$ 作内积"。

定理 2 设 f 是 R^n 内某开集 U 上的实值函数，则下列两个论述是等价的：

(i) f 是 C^1 类函数，

(ii) f 在 U 的每一点可微，并且导数 Df 连续。

证明 假设(i)成立，也就是假设偏导数 $D_1f, \cdots, D_nf$ 存在并且在 U 上连续。在 U 内固定一个向量 x，在第4章里我们曾经证明了 f 在 x 的方向导数存在，它们都由

$$(D_vf)(x) = v_1(D_1f)(x) + \cdots + v_n(D_nf)(x) \tag{8.20}$$

给出。定义

$$l(v) = (D_vf)(x), \quad v \in R^n.$$

由(8.20)，l 显然是 R^n 上的线性函数。这时问题是：当 h 趋于0时，$f(x+h) - f(x) - l(h)$ 是否比 $|h|$ 更快地趋于0？

在单变量的情形，容易看出是这样的。事实上，我们已经讨论过，并以此来启发我们去定义可微函数。在单变量的情形，我们并不需要 f' 是连续的；但是，这里对单变量情形的证明是和 n 个变量情形的证明相平行的。中值定理给出

$$f(x+h) - f(x) = f'(c)h,$$

其中 c 是在 x 和 $x+h$ 之间的一个点。点 c 依赖于 h；然而，我们需要知道的全部事情就是，当 h 趋于0时 c 趋于 x（因为它在 x 和 $x+h$ 之间）。因 f' 连续

$$\lim_{h\to 0} f'(c) = f'(x).$$

于是，

$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)=h[f'(x)-f'(c)]=o(h).$$

现在，让我们看两个变量的情形。n 个变量的情形是它的简单推广。我们把 $f(x+h)-f(x)$ 看作首先是 h_1 的函数，然后看作是 h_2 的函数。在整个讨论中我们假定 h 充分的小，使得 $x+h$ 在以 x 为中心的一个正方形内，而此正方形含在 U 内。记

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)&=f(x_1+h_1,\ x_2+h_2)-f(x_1,\ x_2+h_2)\\ &\quad+f(x_1,\ x_2+h_2)-f(x_1,\ x_2).\end{aligned}\tag{8.21}$$

固定 h_2，且设

$$g_1(t)=f(t,\ x_2+h_2),$$

则 g_1 是 x_1 和 x_1+h_1 之间的闭区间上的 C^1 类函数。并且，$g_1'(t)=(D_1f)(t,\ x_2+h_2)$。于是

$$g_1(x_1+h_1)-g_1(x_1)=h_1(D_1f)(c_1,\ x_2+h_2),\tag{8.22}$$

其中 c_1 依赖于 h_1，但在 x_1 和 x_1+h_1 之间。如果我们定义

$$g_2(t)=f(x_1,\ t),$$

则我们也有

$$g_2(x_2+h_2)-g_2(x_2)=h_2(D_2f)(x_1,\ c_2),\tag{8.23}$$

这里 c_2 在 x_2 和 x_2+h_2 之间。令

$$p_1=(c_1,\ x_2+h_2),$$

$$p_2=(x_1,\ c_2),$$

则由(8.21)，(8.22)和(8.23)得

$$f(x+h)-f(x)=h_1(D_1f)(p_1)+h_2(D_2f)(p_2).$$

我们需要知道

$$f(x+h)-f(x)-l(h)$$

的性态，其中

$$l(h)=h_1(D_1f)(x)+h_2(D_2f)(x).$$

我们有

$$(8.24)\qquad f(x+h)-f(x)-l(h)=\sum_{j=1}^{2}h_j[(D_jf)(p_j)-(D_jf)(x)].$$

点 p_1 和 p_2 依赖于 h。重要的是它们中的每一个，其 i 坐标介于 x_i 和 x_i+h_i 之间，故

$$\lim_{h\to 0} p_j = x.$$

因为每个 D_jf 连续，那么由(8.24)就有理由给出

$$f(x+h)-f(x)-l(h)=o(h).$$

这样我们便证明了 f 在 U 的每一点可微。在(ii)中我们还曾断言导数 Df 是连续的。这是什么意思呢？对每个 x，$(Df)(x)$ 是 R^n 上的线性泛函。于是 Df 是映射

$$U \xrightarrow{Df} L(R^n, R^1).$$

我们断言的就是：$(Df)(x)$ 连续地依赖于 x。连续性与线性泛函空间 $L(R^n, R^1)$ 上的某个范数有关。因为这一空间是有限维的，$L(R^n, R^1)$ 上所有的范数都将确定相同的收敛序列，所以我们用怎样的范数都没有什么关系。譬如，我们可以用“自然”范数

$$\|l\|=\sup_{|x|\leq 1}|l(x)|.$$

这就是

$$\|l\|=|a|,$$

这里 a 是 R^n 中的一个向量，它确定 l：

$$l(h)=\langle h, a\rangle=a_1h_1+\cdots+a_nh_n.$$

我们知道线性泛函 $l=(Df)(x)$ 是由向量 $a=f'(x)$ 确定的。因为偏导数 $D_1f, \cdots, D_nf$ 都连续，很清楚 $f'(x)$ 连续地依赖于 x。

定理 2 的第二个论断：由(ii)推出(i)，我们把它留作习题。

习　题

1. 若 l 是 R^n 上的线性泛函，l 的范数为

$$\|l\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|l(x)|}{|x|}$$

证明：

(a) $\|l\|<\infty$;

(b) $\|l\|$ 是使得

$$|l(x)|\leqslant M|x|,$$

对一切 x 成立的最小的非负数 M。

(c) $\|l\| = |a|$，其中 a 是 R^n 中唯一的一个向量，使得

$$l(x) = \langle x, a\rangle,$$

对一切 $x\in R^n$ 成立。

2. 证明，若 l 是 R^n 上的线性泛函，并且

$$l(h) = o(h),$$

则 $l=0$。

3. 试问，对小的 h，

$$f(h) = o(1)$$

的意思是什么？

4. 若 f 在 x 可微，则 f 在 x 连续。

5. 若 $f(x, y) = xy^3 + x^3y^4$ 以及 $l=(Df)(5, 6)$，$l(7, 8)$ 是什么？

6. 设 $\langle\cdot, \cdot\rangle$ 是 R^n 上的内积，定义 $N(x) = \langle x, x\rangle^{1/2}$。证明除去 $x=0$，N 在任何点可微，并且

$$(DN)(x) = \frac{1}{N(x)}\langle\cdot, x\rangle.$$

7. 若 f 是连通开集 $U\subset R^n$ 上的一个可微(实值)函数，又若 $Df=0$，则 f 是常数。

8. 若 f 是开集 U 上的可微函数，如果 f 在点 $x\in U$ 有局部最大值或局部最小值，则 $f'(x)=0$。

8.4 可 微 映 射

现在，我们考虑映射

$$U \xrightarrow{F} R^k, \quad U\subset R^n,$$

这也就是 R^n 内某个开集 U 上的一个向量值函数。F 在 x 点可微意味着什么呢？这里，我们不打算给出几何的说明。可微性将意

味着用一个从 R^n 到 R^k 内的线性函数来充分逼近 F 是可能的。

定义 设 F

$$U \xrightarrow{F} R^k,\ U \subset R^n,$$

是定义在 R^n 内一个开集 U 上的映射，它把 U 映射到 R^k 内。又设 x 是 U 内的一点，如果存在一个线性变换 L

$$R^n \xrightarrow{L} R^k,$$

使得

$$F(x+h) = F(x) + L(h) + o(h), \tag{8.25}$$

我们就称 **F 在 x 可微**。又若 F 在 U 的每一点可微，就称 F 是一个**可微映射**。

这一定义包含了实值映射的情形。另一个基本的陈述是：可微必连续。

若 F 在 x 可微，那么(8.25)中的线性变换是唯一的，我们称它是 **F 在 x 的导数**，并记为 $L=(DF)(x)$。$(DF)(x)$ 的标准表示矩阵记为 $F'(x)$，并称它是 F 在 x 的 **Jacobi 矩阵**。注意，它和我们前面已经讨论过的函数的梯度记号 f' 是一致的。

定理 3 设 $F=(f_1, \cdots, f_k)$ 是从开集 U 到 R^k 内的映射，x 是 U 的一点，则映射 F 在 x 可微当且仅当每个 f_i 在 x 可微。如果 F 在 x 可微，则

$$(DF)(x) = ((Df_1)(x), \cdots, (Df_k)(x)).$$

证明 映射 F 是由 k 个实值函数所给出的：$f_i(x)$ 是 $F(x)$ 的第 i 个坐标。换句话说，

$$y = f(x),$$

$$y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_k = f_k(x_1, \cdots, x_n).$$

如果每个 f_i 在 x 可微，那么对每个 i，我们有

(8.26) $$f_i(x+h)-f_i(x)-l_i(h)=o(h),$$

其中 l_i 是 R^n 上的一个线性泛函。映射 $L=(l_1, \cdots, l_k)$ 就成为从 R^n 到 R^k 内的一个线性变换。下面我们断定 F 在 x 可微，并且其导数是 L。设

$$G(h)=F(x+h)-F(x)-L(h),$$

根据 (8.26)，对每个 i，当 h 趋于 0 时 $G(h)$ 的第 i 坐标将比 $|h|$ 更快的趋于 0。因而

$$G(h)=o(h)。$$

反过来，假设 F 在 x 可微，又设 $(DF)(x)=L$，现在，L 是由 K 个实值函数 $L=(l_1, \cdots, l_K)$ 所给出。因为 L 是线性的，所以每一个 l 也是线性的。$f_i(x+h)-f_i(x)-l_i(h)$ 的范数总不超过 $F(x+h)-F(x)-L(x)$ 的范数。于是，我们有(8.26)，这正是我们所要证明的事。

由定理 3，我们能够利用 K 个可微函数的组合来构造出许多可微映射。而在关系式 $L=(l_1, \cdots, l_k)$ 中，恰好如同我们已经讨论过的那样，我们看到线性泛函 l_i 是由 f_i 在 x 的梯度所确定的。于是，F 的 Jacobi 矩阵由

$$F'(x)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

给出。由于这个原因，映射 $F=(f_1, \cdots, f_k)$ 的 Jacobi 矩阵的其它记号是

(8.27) $$\frac{dF}{dx} \text{ 或 } \frac{dy}{dx}.$$

(8.28) $$F'=\frac{\partial(f_1, \cdots, f_k)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} \text{ 或 } F'=\frac{\partial(y_1, \cdots, y_k)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}.$$

利用这些记号常常是方便的。

现在，我们看几个映射的例子，它们的出现是自然的，并且不论在什么坐标下都是如此。

例 1 设 L 是线性变换

$$R^n \xrightarrow{L} R^k,$$

则 L 是可微映射。又因为

$$L(x+h)=L(x)+L(h),$$

所以对任何 x，$(DL)(x)=L$。L 的 Jacobi 矩阵是（恒等于）L 的标准表示矩阵。

例 2 假设我们将 R^2 看成复数域，其中的点 $x=(x_1, x_2)$ 就是复数 $z=x_1+ix_2$。那么我们就可以用 $F(z)=z^2$ 定义一个从 R^2 到 R^2 内的映射。更确切的说，$F(x_1, x_2)$ 是平面内的一点，它对应于复数域内的点 $(x_1+ix_2)^2$，这表明

$$F(x_1, x_2)=(x_1^2-x_2^2,\ 2x_1x_2),$$

或

$$y=F(x),$$

其中

$$y_1=f_1(x_1, x_2)=x_1^2-x_2^2,$$
$$y_2=f_2(x_1, x_2)=2x_1x_2.$$

因为 f_1 和 f_2 都是多项式，显然，F 是可微映射。F 的 Jacobi 矩阵是

$$F'(x)=2\begin{bmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix},$$

所以 F 在 x 的导数是线性变换

$$(8.29)\qquad L(h)=2\begin{bmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$
$$=2(x_1h_1-x_2h_2,\ x_2h_1+x_1h_2).$$

要注意的是,(8.29)可以用相应的复数乘法把它表示出来,若 x 对应的复数是 z, h 对应的复数是 w, 则(8.29)可以写为

$$(8.30)\qquad L(w)=2zw,$$

这就是说,映射 F 在点 z 的导数是线性变换"与 $2z$ 的复乘积"。

很容易看出,不论在什么坐标和矩阵之下,我们都有

$$F(z+w)=(z+w)^2=z^2+2zw+w^2=F(z)+2zw+w^2.$$

将 z 固定, $2zw$ 是 w 的线性函数,同时 $w^2=o(w)$。因此,由导数的定义立即得出 $(DF)(z)=L$, 其中 L 是由(8.30)所定义的。

例 3 在例 2 中,会引起这样的说法:"因为函数 $F(z)=z^2$ 是复可微的,并且它的复导数是 $2z$:

$$\lim_{w\to 0}\frac{F(z+w)-F(z)}{w}=2z,$$

所以 z^2 自然是可微的并且它的导数是 $2z$"。但它却并非本章所讨论的导数。函数 $F(z)=z^*$ 不是复可微的,然而,把它看作从 R^2 到 R^2 内的映射却是可微的; 这是因为它是 R^2 上的一个线性变换。我们需要记住,复可微是一个很特殊的性质。

在(8.30)中出现 $2z$ 可以说不是偶然的,让我们看看这是为什么。设 U 是平面上的一个开集,又设

$$U\xrightarrow{F}C,$$

如果 F 是复可微的, F' 是它的复导数,那么由复导数的定义就有

$$F(z+w)=F(z)+F'(z)w+o(w),$$

现在, $F'(z)w$ 是 w 的一个线性函数。因此,由 F 所定义的从 R^2 到 R^2 内的映射是可微的,并且 F 在 z 的导数是"与复数 $F'(z)$ 的乘积"。要注意的是在这里 F' 并不是 Jacobi 矩阵。我们希望这个例子能够澄清这种情形下的含混之处。

例 4 固定一个正整数 n。设 $R^{n\times n}$ 是 $n\times n$ (实) 矩阵组成的空间,则 $R^{n\times n}$ 与 R^{n^2} 同构, 因此, 我们可以讨论 $R^{n\times n}$ 上映射的可

微性。下面是一个有趣的例子。设U是可逆的$n\times n$矩阵组成的集，回忆一下就能知道，U是$R^{n\times n}$的一个开子集。其证明如下。设A是一个可逆的$n\times n$矩阵，我们证明对所有范数适当小的矩阵H，$A+H$是可逆的。我们记

$$A+H=A(I+A^{-1}H).$$

现在，当$|A^{-1}H|$适当小时，$I+A^{-1}H$是可逆的，这是因为我们可以利用$\dfrac{1}{1+x}$的幂级数。选取$\delta>0$，使得$\delta|A^{-1}|<1$，则

$$\begin{aligned}(8.31)\qquad (A+H)^{-1}&=(I+A^{-1}H)^{-1}A^{-1}\\&=A^{-1}-A^{-1}HA^{-1}+A^{-1}HA^{-1}HA^{-1}\\&\quad-\cdots,\ |H|<\delta.\end{aligned}$$

现在设F是U上的反演映射：

$$F(A)=A^{-1},$$

F可微吗？如果它在任何情形下都是正确的，F是可微的并且有导数$-A^{-2}$。但这却不正确，因为$(DF)(A)$必须是从$R^{n\times n}$到$R^{n\times n}$内的线性变换。啊！它必须是线性变换："与$-A^{-2}$的乘积"，是左乘还是右乘呢？没有理由认为它只能在某一边而不在另一边，所以，我们将在每一边取一个A^{-1}，这就使我们猜测$(DF)(A)$是矩阵空间上的线性变换，其定义为

$$L(H)=-A^{-1}HA^{-1}.$$

我们能够很快的把猜测变成现实。考察(8.31)，它告诉我们

$$F(A+H)=F(A)-A^{-1}HA^{-1}+A^{-1}HA^{-1}HA^{-1}-\cdots,$$

所以

$$|F(A+H)-F(A)-A^{-1}HA^{-1}|\leqslant\sum_{k=2}^{\infty}|H|^k|A^{-1}|^{k+1}$$

$$=|H|^2\sum_{k=2}^{\infty}|H|^{k-2}|A^{-1}|^{k+1}=o(|H|).$$

还有一些关于可微映射的运算的事实，我们将加以指出。若

F 和 G 都是到 R^k 内的映射，又若它们都在 x 可微，那么 $F+G$ 在 x 可微，并且 $D(F+G)=DF+DG$。这是容易验证的。让我们致力于可微映射的乘积。

定理 4 设 U 是 R^n 内的一个开集，F 是从 U 到 R^k 内的一个映射，f 是 U 上的一个实值函数。如果 f 和 F 都在 x 可微，其导数分别是 l 和 L，则乘积 fF 在 x 可微，并且它的导数 $M=(DfF)(x)$ 是：

$$M(h)=l(h)F(x)+f(x)L(h),$$

也就是说，

$$(fF)'(x)=f'(x)F(x)+f(x)F'(x).$$

证明 设 $l=(Df)(x)$，$L=(DF)(x)$，并且

$$g(h)=f(x+h)-f(x)-l(h)$$
$$G(h)=F(x+h)-F(x)-L(h),$$

现在，

$$\begin{aligned}
&(fF)(x+h)-(fF)(x)\\
&=[f(x+h)-f(x)]F(x+h)+f(x)[F(x+h)-F(x)]\\
&=l(h)F(x+h)+f(x)L(h)+g(h)F(x+h)+f(x)G(h)\\
&=l(h)F(x)+f(x)L(h)+l(h)[L(h)+G(h)]\\
&\qquad+g(h)F(x+h)+f(x)G(h).
\end{aligned}$$

我们所要证明的就是富式的最后三项是 $o(h)$。因为 $G(h)=o(h)$，$g(h)=o(h)$，又因为 $F(x+h)$ 趋于 $F(x)$，所以最后两项中的每一项都比 $|h|$ 更快地趋于 0。我们可以用相仿的方法来处理 $l(h)G(h)$，留给我们的麻烦是关于 $l(h)L(h)$。现在，因为 l 和 L 都是线性的，所以

$$|l(h)L(h)|\leqslant\|l\|\|L\||h|^2,$$

这就证明了 $l(h)L(h)=o(h)$。

定理 4 对两个向量值函数的乘积也是成立的，其证明在本质

上和定理 4 的证明相同。下面介绍复合可微映射的一个非常基本的方法。

定理 5（链规则） 设U是R^n内的一个开集，V是R^K内的一个开集。又设F和G是映射

$$U \xrightarrow{F} R^k,$$

$$V \xrightarrow{G} R^q,$$

并且$F(U)\subset V$。设x是U内一点，如果F在x可微，G在$F(x)$可微，则复合映射$G\circ F$在x可微并且

$$D(G\circ F)(x)=(DG)(F(x))\circ(DF)(x). \tag{8.32}$$

证明 设$L=(DF)(x)$和$M=(DG)(F(x))$。定理的论断是：$G\circ F$在x可微，并且它的导数是一个从R^n到R^q内的线性变换：

$$R^n \xrightarrow{L} R^K \xrightarrow{M} R^q.$$

设$y=F(x)$。由导数的定义得

$$F(x+h)=F(x)+L(h)+|h|R(h),$$

$$G(y+k)=G(y)+M(k)+|k|S(k),$$

其中

$$\lim_{h\to 0}R(h)=0,$$

$$\lim_{k\to 0}S(k)=0.$$

现在

$$\begin{aligned}(G\circ F)(x+h)-(G\circ F)(x)&=G(F(x+h))-G(F(x))\\&=G(y+L(h)+|h|R(h))-G(y)\\&=G(y+k)-G(y)=M(k)+|k|S(k),\end{aligned}$$

这里$k=L(h)+|h|R(h)$。因为M是线性的，

$$\begin{aligned}M(k)&=M(L(h))+M(|h|R(h))\\&=M(L(h))+|h|M(R(h)).\end{aligned}$$

如果能够证明

$$|h|M(R(h))+|k|S(k)=o(h),$$

那么我们就证明了所要的结果。现在对上式证明如下：它的左端不超过

$$|h|\|M\||R(h)|+[|L(h)|+|h||R(h)|]|S(k)|$$
$$\leqslant|h|[\|M\||R(h)|+\|L\||S(k)|+|R(h)||S(k)|].$$

现在

$$\lim_{h\to 0}k=0,$$

所以

$$\lim_{h\to 0}S(k)=0,$$

又因为 h 趋于 0 时，$R(h)$ 也趋于 0，这便证明了结论。

用 Jacobi 矩阵的语言来说，定理 5 是

(8.33)
$$(G\circ F)'(x)=G'(F(x))F'(x).$$

我们在计算时，象下面那样利用链规则是十分方便的：

$$y=F(x),$$
$$z=G(y),$$
$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx},$$

或

$$\frac{\partial(z_1,\cdots,z_d)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=\frac{\partial(z_1,\cdots,z_d)}{\partial(y_1,\cdots,y_k)}\frac{\partial(y_1,\cdots,y_k)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}.$$

换句话说，

(8.34)
$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j}=\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial z_i}{\partial y_r}\frac{\partial y_r}{\partial x_j}.$$

记住 (8.34) 的意义是重要的。它表明，如果已经给出 $f_1,\cdots,f_k$——R^n 内某个开集上的可微函数，它们定义了一个映射 F 如下：

$$y=F(x),$$

或

$$(8.35)\qquad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_k = f_k(x_1, \cdots, x_n). \end{cases}$$

又假若我们有 $g_1, \cdots, g_d$——F 的值域(或包含这个值域的某个开集)上的可微函数，它们也定了一个映射 G 如下：

$$z = G(y),$$

或

$$(8.36)\qquad \begin{cases} z_1 = g_1(y_1, \cdots, y_k), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_d = g_d(y_1, \cdots, y_k). \end{cases}$$

现在，我们在 (8.36) 中用 $f_r(x_1, \cdots, x_n)$ 来代替 y_r，"将 z 表示为 x 的函数"。那么就获得复合映射 $H = G\circ F$ 如下：

$$z = H(x),$$

或

$$(8.37)\qquad \begin{cases} z_1 = h_1(x_1, \cdots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_d = h_d(x_1, \cdots, x_n). \end{cases}$$

记住

$$h_i(x_1, \cdots, x_n) = g_i(f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_k(x_1, \cdots, x_n)).$$

这时，(8.34) 或链规则意味着

$$(8.38)\qquad \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial g_i}{\partial y_r}(F(x)) \frac{\partial f_r}{\partial x_j}(x).$$

很明显，如果打算去计算某个问题时，要写出 x_j, f_j, y_r, g_r, z_i 和 h_i 是有点麻烦的。无论(8.38) 或 (8.32) 作为链规则被应用的时候，都应该仔细弄清楚你要做的事情是什么。但在计算中通常总是简单的说有一个映射 F，它是由某些确定的 x 的函数 y 所给出的：

$$y_r = y_r(x_1, \cdots, x_n),$$

新映射G是由某些确定的y所给出的函数z：

$$z_i = z_i(y_1, \cdots, y_K)。$$

在这样的条件下，z_i关于x_j的变化率是：

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial z_i}{\partial y_r} \frac{\partial y_r}{\partial x_j}.$$

你必须记住：在这些变量中那个是函数，以及如何去计算导数。

定理6（中值定理） 设g是U上的可微函数，U是R^n中的一个凸的开集。又设a和b是U内两点，则存在点p，它在a到b的直线段上，使得

$$g(b) - g(a) = \langle b - a, g'(p) \rangle.$$

证明 设

$$F(t) = tb + (1-t)a, \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

F的象就是从a到b的直线段。令$f = g \circ F$，即

$$f(t) = g(tb + (1-t)a),$$

则f在闭区间$[0, 1]$连续，并且（至少）在开区间$(0, 1)$可微。此外，

$$f'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t},$$

或者，更严格地说，

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sum^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial f_j}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \frac{\partial g}{\partial x_j} (F(t)) \\ &= \langle b - a, f'(F(t)) \rangle. \end{aligned}$$

单变量的中值定理告诉我们存在一个数c，$0<c<1$，使得$f'(c) = f(1) - f(0)$。再设$p = F(c)$即得证明。

习　题

1. 重复8.3节中习题1和2的叙述，将那里的线性泛函改为线性变

换。(自然，习题 1 中的向量 a 将改为标准的表示矩阵A.)证明可微映射的导数的唯一性。

2. 可微映射是连续的。

3. 设U是 R^n 中的开集，F 和G都是从U到 R^K 内的可微映射。定义实函数$\langle F, G\rangle$为 $\langle F, G\rangle(x) = \langle F(x), G(x)\rangle$，证明$\langle F, G\rangle$在$U$上是可微的，并且(在适当的意义下)

$$(D\langle F, G\rangle)(x) = \langle (DF)(x), G(x)\rangle + \langle F(x), (DG)(x)\rangle.$$

4. 对矩阵值函数，叙述并证明和定理 4 类似的论断。

5. 固定正整数 k，设

$$R^{n\times n} \xrightarrow{F} R^{n\times n}$$

是 $n\times n$ 矩阵上的映射，其定义为 $F(A) = A^k$。证明F在 $R^{n\times n}$ 的每一点可微，并且求出 $(DF)(A)$。

6. 利用习题 4 和链规则，求映射G的导数，映射G定义在可逆的 $n\times n$ 矩阵所组成的集上：$G(A) = A^{-k}$。

7. 设U是平面上的一个开集，f是U上的复值函数，并且 f 是复可微的。又设F是从U到 R^2 的映射，它是由 f 所定义的：

$$F = (u, v),$$

$$f = u + iv.$$

(我们要把 f 和F加以区别，从而不会混淆复导数 f' 和梯度 F'。) 证明若 $L = (DF)(x, y)$，则(给予恰当的解释)

$$L(a, b) = f'(x+iy)(a+ib).$$

8. 设映射F在 R^2 内原点的某个邻域上连续可微，$F = (u, v)$，又设 f 是与之相联系的复值函数 $f = u + iv$，证明 f 不是恒等函数 z 的平方根，即

$$[f(x, y)]^2 = x + iy$$

在原点的邻域内不成立。

9. 若F是从开集U到 R^k 内的一个可微映射，则导数也是一个映射：

$$U \xrightarrow{DF} L(R^n, R^k).$$

空间 $L(R^n, R^k)$是有限维的——它本质上是 R^{nk}。那么，能否在某种意义下谈论 DF 的可微性? $(D^2F)(x)$具有何种形式?这里 D^2F 表示 $D(DF)$。如何用 2 阶偏导数来给出 D^2F? 何谓 C^∞ 类的映射?

10. 中值定理给出了 n 个变量的 Taylor 公式的第一步：

$$f(x+h)=f(x)+\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(p).$$

考察 $g(t)=f(x+th)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，利用它证明(若 f 属于 C^2 类)

$$f(x+h)=f(x)+\sum_{j=1}^{n} h_j(D_j f)(x)+\frac{1}{2}\Big(\big(\sum_{j=1}^{n} h_j D_j\big)^2 f\Big)(p),$$

这里 p 在从 x 到 $x+h$ 的直线段上。并将此推广到 C^{k+1} 类的函数中去，并和(第5章定理10)积分形式的余项加以比较。

8.5 逆映射

设我们有一个从 R^n 的某个开集 U 到 R^k 内的可微映射

$$U \xrightarrow{F} R^k,\quad U\subset R^n.$$

我们想知道何时 F 有一个可微的逆映射

$$R^n \xleftarrow{F^{-1}} F(U). \tag{8.39}$$

我们知道，反函数 (8.39) 是存在的当且仅当 F 是 1:1 的。如果 F 是 1:1 的，那么为了讨论 F^{-1} 的可微性，我们必须知道 $F(U)$ 是一个开集。暂时假定 F 是 1:1 的，$F(U)$ 是开的，并且 F^{-1} 又是可微的，那么链规则告诉我们(在每一点)

$$(DF^{-1})\circ(DF)=I_n,$$

$$(DF)\circ(DF^{-1})=I_k,$$

其中 I_j 是 R^j 上的恒等变换。因此，对 U 中的任何 x，Jacobi 矩阵 $F'(x)$ 既有左逆元也有右逆元。所以，它必定是一个方阵($k=n$)。

从这个简短的讨论中我们获得两件事。第一，我们只关心可微映射

$$U\xrightarrow{F} R^n,\quad U\subset R^n,$$

第二，如果 F 有一个可微的逆映射，那么在 U 内每一点 x，F 的 Jacobi 矩阵 $F'(x)$ 也是可逆的。现在，我们将要证明，如果连续可微的映射 F 是 1:1 的，并且 $F'(x)$ 在每一点可逆，那么 $F(U)$ 是一个开集，并且 F^{-1} 是可微映射。对读者来说，已经知道它的一个

特殊情形即线性变换的情形：一个将 R^n 映射到 R^n 上的线性变换 L 是可逆的，并且其逆 L^{-1} 是一个线性变换。我们将要处理更一般的映射 F，并用线性变换来逼近它们。

引理 设 F 是连续可微映射

$$U \xrightarrow{F} R^n,$$

其中 U 是 R^n 内开集，x 是 U 的点，使得 $(DF)(x)$ 是可逆的，即，

(8.42) $$f_i(b)-f_i(a)=\langle b-a,\ f_i'(p_i)\rangle,$$

这里 p_i 是从 a 到 b 的直线段上的一点．由(8.41)和(8.42)我们有

(8.43) $$|f_i(b)-f_i(a)-\langle b-a,\ f_i'(x)\rangle|<\frac{\varepsilon}{n}|b-a|,$$

其中

$$\langle f_i(b)-f_i(a)\rangle-\langle b-a,\ f_i'(x)\rangle$$

是向量 $F(b)-F(a)-L(b-a)$ 的第 i 个坐标，而一个向量的范数不超过它的每个坐标的绝对值之和，因而，(8.43)告诉我们，当 $a,\ b\in W$ 时

(8.44) $$|F(b)-F(a)-L(b-a)|<\varepsilon|b-a|$$

于是

$$\begin{aligned}|F(b)-F(a)|&\geqslant|L(b-a)|-\varepsilon|b-a|\\&\geqslant\|L^{-1}\|^{-1}|b-a|-\varepsilon|b-a|\\&\geqslant\frac{1}{2}\|L^{-1}\|^{-1}|b-a|,\quad a,\ b\in W.\end{aligned}$$

按照相仿的论述，我们容易获得

$$|F(b)-F(a)|\leqslant M|b-a|.$$

然而我们已经说过，这不是我们主要关心的事。

定理 7（逆映射定理） 设 F 是一个从 R^n 中某个开集到 R^n 内的连续可微映射，x 是 F 定义域内的一点，并且 $(DF)(x)$ 可逆，即，$\det F'(x)\neq 0$，则 x 有一个开邻域 W，使得

(a) F 在 W 上是 1:1 的。

(b) $F(W)$ 是开集。

(c) 逆映射

$$W\xleftarrow{F^{-1}}F(W)$$

是连续可微的，并且它的导数是

$$(DF^{-1})(F(a))=(DF)(a)^{-1}.$$

证明 设N是以x为中心的一个开球，使得闭球$\bar{N}$在F的定义域内，并且在$\bar{N}$上我们有不等式

(8.45) $\qquad m|b-a|\leqslant|F(b)-F(a)|,\quad a,\ b\in N.$

刚才的引理保证了开球N和常数$m>0$的存在。因为F是连续的，这一不等式在闭球$\bar{N}$上也成立。这告诉我们，如果$a,\ b\in\bar{N}$，$F(a)=F(b)$，那么由(8.45)得到$a=b$，这表明F在$\bar{N}$上是1:1的。我们可以取$W=N$，它满足定理的结论(a)。

为了获得既满足定理结论(a)又满足(b)的邻域，我们可以把N缩小一些。首先，我们把N缩小到使得在N的每一点$(DF)(a)$是非奇的。我们能够做到这一点，这是因为F是C^1类的，所以$\det F'(a)$是连续函数(它在$a=x$不为0)。设$y=F(x)$，我们要证明y在$F(N)$的内部。也就是，我们要寻找y的一个邻域，它完全在F的值域内。为此，设S是球N的边界：

$$N=\{a;\ |a-x|<\delta\},$$

$$S=\{a;\ |a-x|=\delta\}.$$

集S是紧的且F是连续的，于是$F(S)$是R^n内的紧子集。因为$y=F(x)$，而F在$\bar{N}$上是1:1的并且$x\notin S$，所以点y不在$F(S)$内。这种情形可以用图30表示出来。设r是y到紧集$F(S)$的距离：

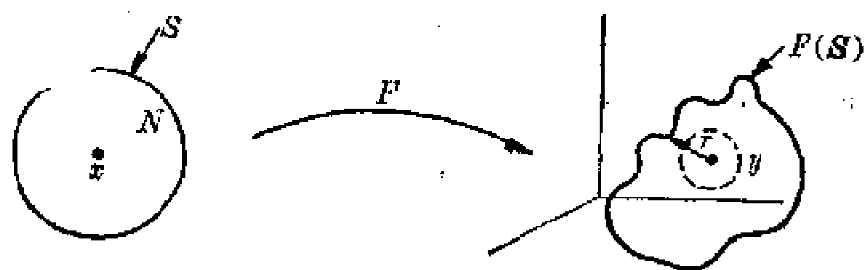


图 30

$$r=d(y,\ F(S))=\inf_{a\in S}|y-F(a)|.$$

我们将证明$F(N)$含有一个以y为中心以$r/2$为半径的开球。

设 z 是 R^n 中的一点，适合

$$|z-y|<\frac{r}{2}.$$

我们考察 z 到集 $F(\overline{N})$ 的距离

$$d(z, F(\overline{N}))=\inf\{|z-F(a)|, a\in\overline{N}\}.$$

因为 $|z-y|<\frac{r}{2}$，所以我们知道两件事：

$$(8.46)\qquad \begin{cases} d(z, F(\overline{N}))<\frac{r}{2}, \\ d(z, F(S))>\frac{r}{2}. \end{cases}$$

函数 $g(a)=|z-F(a)|^2$ 在 $\overline{N}$ 上连续，所以存在一点 $b\in\overline{N}$，使得

$$|z-F(b)|^2=d(z, F(\overline{N}))^2.$$

因为 F 在 $\overline{N}$ 上是 1:1 的，(8.46)告诉我们 $b\notin S$，也就是说 b 在开球 N 内，于是，定义在 N 上的函数

$$g(a)=\sum_{i=1}^{n}(z_i-f_i(a))^2$$

在点 b 有最小值。这表明 g 的所有偏导数在 b 都是 0

$$(8.47)\qquad 0=\frac{\partial g}{\partial x_j}(b)=-2\sum_{i=1}^{n}(z_i-f_i(b))\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(b).$$

而(8.47)右端的和式是向量(矩阵)：

$$(z-F(b))F'(b)$$

的第 j 个坐标。我们选取 N，使得对 N 内的每一个 a，$F'(a)$ 是可逆的，于是联立方程(8.47)表明 $z-F(b)=0$，这样我们便证明了 $z\in F(N)$。

设 $W=\left\{a\in N;\ |y-F(a)|<\frac{r}{2}\right\}$，则 W 是 x 的一个开邻域，并满足定理的结论(a)和(b)。对这个 W，我们可以证明它也满足结论(c)如下，因为 F 在 W 上是 1:1 的以及 $F(W)$ 是开的，这样我们就可以问 F^{-1}

$$W \xleftarrow{F^{-1}} F(W)$$

是否可微。我们马上知道 F^{-1} 是连续的，因为 F 在 $\overline{W}$ 上连续和 1:1，并且 $\overline{W}$ 是紧的。F^{-1} 的连续性也可由上述引理中的不等式获得。现在我们证明 F^{-1} 在点 $y=F(x)$ 可微，并且

$$(DF^{-1})(y)=L^{-1},$$

其中 $L=(DF)(x)$。在 W 的其他点的证明是相同的。对 $F(W)$ 内的点 z，定义

$$R(z)=F^{-1}(z)-F^{-1}(y)-L^{-1}(z-y). \tag{8.48}$$

我们必须证明

$$\lim_{z\to y}\frac{R(z)}{|z-y|}=0, \tag{8.49}$$

将线性变换 L 作用到(8.48)的两端，我们得

$$L(R(z))=L(a-x)-[F(a)-F(x)], \tag{8.50}$$

这里 a 是 W 中唯一的点，使得 $F(a)=z$。因为 F 在 x 可微以及 $(DF)(x)=L$，(8.50)保证了

$$\lim_{a\to x}\frac{L(R(z))}{|a-x|}=0, \tag{8.51}$$

又因为

$$|L(R(z))|\geqslant\|L^{-1}\|^{-1}|R(z)|$$

$$|a-x|\leqslant 2\|L^{-1}\||F(a)-F(x)|,$$

那么由(8.51)便得出(8.49)。

定义 设 U 是 R^n 的一个开子集，F 是一个从 U 到 R^n 内的可微映射。**F 的 Jacobi 行列式**是从 U 到 $R^{n\times n}$ 内的函数 $\det F'$。

定理 8（逆映射定理） 设 U 是 R^n 的一个开子集，F 是从 U 到 R^n 内的连续可微映射，并且 F 的 Jacobi 矩阵在 U 上无零点，则 F 是一个开映射，并且局部 1:1。若 F 在 U 上是 1:1 的，则逆映射

$$U \xleftarrow{F^{-1}} F(U)$$

是连续可微的，并且$(F^{-1})'(F(x))=[F'(x)]^{-1}$。

证明 设V是U内的一个开子集。$F(V)$是开集吗？是的，因为（按照定理7）每一点$x\in V$有一个邻域W，F将它映射成一个开集，并且我们可以取W足够小，使得$W\subset V$。这一邻域还可以这样选取：使得F在W上是1:1的——这就是为什么我们说F是局部1:1的。关于F^{-1}的论断由定理7立即可得。

例5 平面上的极坐标是由可微映射所定义的。设

$$U=\{(r,\theta)\in R^2;\ r>0\}$$

定义

$$U \xrightarrow{F} R^2$$

为

$$F(r,\theta)=(x,y),$$

其中

$$x=r\cos\theta,$$

$$y=r\sin\theta.$$

显然，F是C^∞类的映射，F的Jacobi矩阵是

$$F'(r,\theta)=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}.$$

F的Jacobi行列式是：

$$\det F'(r,\theta)=r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r.$$

于是，$\det F'$在U上无零点，所以F是局部1:1的，并且是一个开映射，值域$F(U)$是有孔的平面$R^2-\{0\}$。

注意到在任何薄片

$$a<\theta<b$$

(其中 $b-a<2\pi$) 上 F 是 1:1 的。这一薄片在 F 下的象是平面上的开扇形（见图 31)。在这样的扇形上，我们可以利用 r 和 θ 作为“极坐标”。其意义是：对扇形内的每一点 (x, y)，存在一个且只有一个数对 (r, θ)，使得 $r>0$, $a<\theta<b$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$。在这个扇形上，r 和 θ 可以表示为 x 和 y 的“光滑”函数。

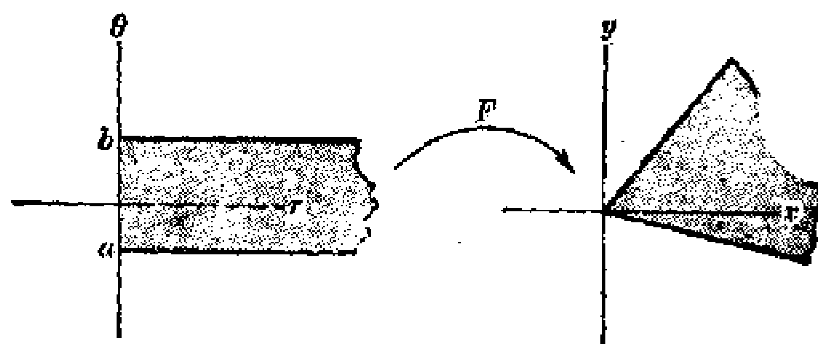


图 31

除了明确的公式

$$r=(x^2+y^2)^{1/2},$$

$$\theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x}.$$

(曾作过合适的解释)我们还能够看到关于导数的某些事，我们知道

$$(DF^{-1})(x, y)=[(DF)(r, \theta)]^{-1},$$

于是

$$(DF^{-1})(x,y)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{r}\begin{bmatrix}r\cos\theta & r\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

因此，

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta,\qquad \frac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{1}{r}\sin\theta,\quad \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{1}{r}\cos\theta.$$

你确实理解这些方程式的意义吗？

例6 对 R^3 内的一点 (x, y, z)，其球面坐标是数 r, θ, φ. 定义为

$$x=r\cos\theta\sin\varphi,$$
$$y=r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z=r\cos\varphi.$$

若$(x, y, z)\neq(0, 0, 0)$，则存在唯一的一组三个数 $r>0$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$（图 32）满足上面的方程. 映射 $F(r, \theta, \varphi)=(x, y, z)$ 具有和例 5 中极坐标非常相似的性质. F 的 Jacobi 行列式是 $-r^2\sin\varphi$，它强调了这样一个事实：在球面坐标中沿 z 轴是不适合的，因为在那里 $\varphi=0$.

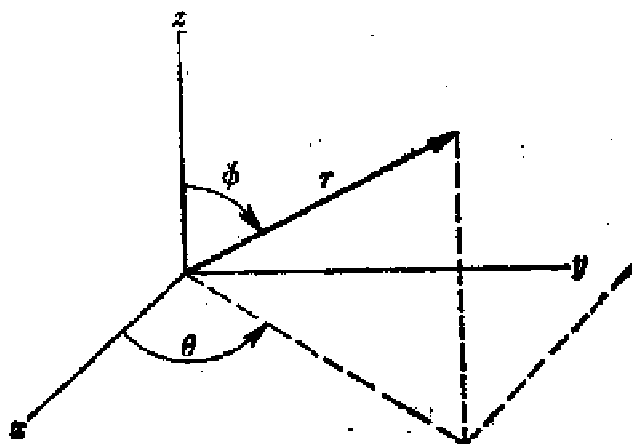


图 32

例7 设我们有一个任意的连续可微映射

$$U\xrightarrow{F}R^n,$$

它是1:1 的，并且 Jacobi 行列式无零点：

$$\det F'(x)\neq 0,\quad x\in U,$$

则 F 定义了 U 上的一个新"坐标系"，对 U 内的每一点 $x=(x_1, \cdots, x_n)$，联系着唯一的一个 n-数组 $y=F(x)=(y_1, \cdots, y_n)$，其中

$y_i = f_i(x_1, \cdots, x_n)$。换句话说，如果方便的话，我们可以用 y 坐标来描述 U 内每一点。当 x 遍历 U 时，其相应的 y 坐标 $(y_1, \cdots, y_n)$ 将遍历开集 $V = F(U)$，逆映射

$$U \xleftarrow{F^{-1}} V$$

简单地表示了 x 坐标是 y 坐标的函数：$x_i = g_i(y_1, \cdots, y_n)$。如同前面的例子那样，可以用映射 F^{-1} 即 $x_i = g_i(y_1, \cdots, y_n)$ 来引进 V 上的新坐标，这是十分普通的。

应用不同的坐标系并不限于上面所给的两种类型。利用适当的坐标系可以使某些定理的证明容易一些。这里是一个很简单的说明。

设 g 是 C^1 类函数，它定义在 R^3 中原点的某个邻域上，并且 $g(0) = 0$，粗略地说，g 的零点所组成的集可以看作是一个通过原点的曲面，如果我们不考虑某些相当坏的情形，这种想法是正当的。假定 $(Dg)(0) \neq 0$，也就是假定在原点 g 的梯度不是 0，那么，我们能够证明集 $S = \{x; g(x) = 0\}$ 是在原点附近的一个真正的曲面。当然，还存在另外的函数 f 也定义出同一个曲面，例如，设 h 是 C^1 类的函数，使得 $h(0) \neq 0$。令 $f = gh$，那么，在原点的一个小邻域内 f 和 g 有相同的零点集。现在要问的是，如果我们给了 f，它定义在原点的一个邻域上，并且是 C^1 类的，在 S 和原点的那个邻域的交集上，如果 f 为 0，那么，f 可以被 g 除吗？也就是说，我们能不能写出 $f = gh$，其中 h 是原点附近的一个光滑函数？

对于这个方程，逆映射定理会告诉我们什么呢？它告诉我们 g 是坐标函数 x_i 中的一个。为什么呢？因为 $(Dg)(0) \neq 0$，所以 g 的某个偏导数在原点非 0。为方便起见，设 $(D_1 g)(0) \neq 0$，那么我们用 g，x_2 和 x_3 作为 R^3 中原点附近的坐标，映射

$$F(x) = (g(x), x_2, x_3)$$

是 C^1 类的，它有 Jacobi 矩阵

$$F'(x)=\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

于是 $\det F' = D_1 g$，因此 $\det F'(0) \neq 0$。选取原点的邻域 U 使得 F 将它 1:1 地映射到原点的某个开邻域上。若 f 在 U 上是 C^1 类的，并且 f 在 $S \cap U = \{x \in U; g(x)=0\}$ 上为 0，那么 $f \circ F^{-1}$ 在 V 上是 C^1 类的，并且在 $F(S) = \{y \in V; y_1 = 0\}$ 上为 0。明显地，证明 f 可以被 g 除如同证明 $f \circ F^{-1}$ 可以被 y_1 除。简言之，我们只要考虑这样的问题：f 在原点附近是 C^1 类的，并且 f 在平面 $x_1 = 0$ 上为 0。要证明 $f = x_1 h$，其中 h 是（至少是）连续的，这是容易的事。

在最后一个例子中，我们曾经提到 R^3 中的曲面，它是由方程 $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ 所确定的。当 $(D_1 g)(0) \neq 0$ 时，在原点附近我们可以用 g, x_2, x_3 作为坐标。特别地，在原点附近我们能够将 x_1 表示为 g, x_2 和 x_3 的函数：$x_1 = p(y_1, x_2, x_3) = p(g(x_1, x_2, x_3), x_2, x_3)$。通过原点的那个曲面 S 可以表达为 $x_1 = p(0, x_2, x_3)$。简言之，关系式 $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ 意味着可以确定 x_1 是 x_2 和 x_3 的函数，并且这一种依赖性在 $(D_1 g)(x) \neq 0$ 的点的附近成立。这是下面要给出的基本结果的一个特殊情形。

定理 9（隐函数定理） 设 W 是 R^{k+m} 的一个开子集，F 是从 W 到 R^m 内的一个连续可微映射，又设 $(a;b)$ 是 W 中的一点，使得 $F(a;b)=0$，如果 $m \times m$ 矩阵

(8.52) $$M = [(D_{k+j} f_i)(a;b)]$$

是非奇异的，则存在点 a 的开邻域 U 和 b 的开邻域 V，使得当 $x \in U$ 时，有唯一的一点 $G(x) \in V$，满足 $F(x; G(x)) = 0$。这样定义的 G 是连续可微的。

证明 定义一个映射

$$W \xrightarrow{\tilde{F}} R^{k+m}$$

为 $\tilde{F}(x;\ y)=(x;F(x;y))$，显然$\tilde{F}$在$W$上连续可微。$\tilde{F}$的 Jacobi 矩阵是分块的：

$$\tilde{F}'=\begin{bmatrix} I & 0 \\ [D_j f_i] & [D_{k+j} f_i] \end{bmatrix}.$$

特别的，

$$\det \tilde{F}'(a;b)=\det M,$$

这里M就是(8.52)的矩阵。由假设，$\det M\neq 0$。我们将逆映射定理应用到映射$\tilde{F}$以及点$(a;b)$，我们得到$(a;b)$的一个开邻域，在此邻域上$\tilde{F}$是 1:1 的，并且有连续可微的逆映射。我们可以假定这一邻域是$U\times V$，其中U是a的邻域，V是b的邻域。

考察$\tilde{F}$的逆映射，它定义在$\tilde{F}(U\times V)$上，$\tilde{F}(U\times V)$是$\tilde{F}(a;b)=(a;0)$的一个开邻域，这一逆映射将$(x;y)$表示为$(x;F(x,y))$的函数。设$x\in U$，对某$y\in V$，如果点$\tilde{F}^{-1}(x;0)$具有形式$(x;y)$，则定义$G(x)=y$。

隐函数定理可以用纯数量值的函数表达出来，这件事是值得一做的。我们给出R^k内一点$a=(a_1,\cdots,a_k)$和R^m内一点$b=(b_1,\cdots,b_m)$。假设我们有m个函数$f_1,\cdots,f_m$，它们在R^{k+m}内一点$(a;b)$的某个邻域内是C^1类函数。我们感兴趣的是R^{k+m}中的这种点$(x;y)$的集合，它们同时满足m个关系式

$$(8.53)\qquad \begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m)=0. \end{cases}$$

假定$(a;b)$也是这样的一个点，隐函数定理陈述如下：若

$$\left|\frac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}\right|(a;b)\neq 0$$

(两条垂直的线表示行列式)，则存在一个关于 a 的开集 U 和一个关于 b 的开集 V，使得对每个 $x\in U$，存在唯一的一个 $y\in V$，对于这一对 x, y, (8.53) 中的 m 个关系式成立——y 按照连续可微的方式依赖于 x。换句话说，在 U 上存在连续可微的函数 $g_1, \cdots, g_m$，使得在集 $U\times V$ 上，方程(8.53)都等价于

$$(8.54)\qquad \begin{cases} y_1 = g_1(x_1, \cdots, x_k), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = g_m(x_1, \cdots, x_k). \end{cases}$$

由于关系式

$$(8.55)\qquad f_i(x_1, \cdots, x_k, g_1, \cdots, g_m) = 0, \quad 1\leqslant i\leqslant m,$$

在 U 上是恒等式，我们可以求出 $g_1, \cdots, g_m$ 的偏导数。利用链规则，对 x_j 进行微分：

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x; G(x)) + \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_r}(x; G(x))\frac{\partial g_r}{\partial x_j}(x) = 0,$$

$$(8.56)\qquad 1\leqslant i\leqslant m.$$

它是导数

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_j}, \cdots, \frac{\partial g_m}{\partial x_j}$$

的线性方程组。因为系数矩阵

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}.$$

在 $(x; G(x))$ 是非奇的——它的行列式是

$$\left| \frac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)} \right|(x; G(x)).$$

于是由 Gramer 法则，就可以得到方程组的解：

$$\frac{\partial g_r}{\partial x_j}=-\frac{\left|\dfrac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(y_1,\cdots,x_j,\cdots,y_m)}\right|}{\left|\dfrac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}\right|}.$$

右端的 Jacobi 行列式都是在 $(x;G(x))$ 取值。而 $\partial(y_1,\cdots,x_j,\cdots,y_m)$ 表示用 x_j 代替 y_r。

自然，总的说来，最后的那些方程说明，若 $F=(f_1,\cdots,f_m)$，$G=(g_1,\cdots,g_m)$，则

$$F(x;G(x))=0.$$

这说明 $F\circ\widetilde{G}=0$，其中

$$U\xrightarrow{\widetilde{G}}U\times V,$$

$$\widetilde{G}(x)=(x;G(x)).$$

于是

$$F'(x;G(x))\widetilde{G}'(x)=0$$

现在 $(k+m)\times k$ Jacobi 矩阵 $\widetilde{G}'(x)$ 是分块的：

$$\widetilde{G}'(x)=\begin{bmatrix} I \\ G'(x)\end{bmatrix},$$

其中 I 是 $k\times k$ 恒等矩阵。如果我们采用缩写

$$\frac{dF}{dx}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_k}\end{bmatrix},$$

$$\frac{dF}{dy}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m}\end{bmatrix},$$

则方程 $F'(x;G(x))\tilde{G}'(x)=0$ 变为

$$\frac{dF}{dx}(x;G(x))+\frac{dF}{dy}(x;G(x))G'(x)=0.$$

于是

$$G'(x)=-\left(\frac{dF}{dy}\right)^{-1}\frac{dF}{dx}.$$

粗略地说，从 $F(x,y)=0$ 中我们有

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\dfrac{dF}{dx}}{\dfrac{dF}{dy}}.$$

（记住，这是无意义的）

有时候，我们应用上面已经讨论过的隐函数定理并不见得十分简洁。所以我们要建立定理的其他形式。设 p 是 R^n 内一点，F 是从 p 的一个邻域到 R^m 内的连续可微映射，其中 $m\leqslant n$。其 Jacobi 矩阵 $F'(p)$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，又设 $F'(p)$ 的秩足够大：$F'(p)$ 的秩 $=m$。那么存在 m 个足标 $i_1<\cdots<i_m$，使得

$$\left|\frac{\partial(f_1,\cdots,f_m)}{\partial(x_{i_1},\cdots,x_{i_m})}\right|(p)\neq 0.$$

隐函数定理说明了以下事实，考虑含有 p 点的一个等值面

$$S=\{x;F(x)=F(p)\}.$$

那么在 S 上靠近 p 的那一部分内，就能够将坐标 $x_{i_1},\cdots,x_{i_m}$ 表示为其余 $n-m$ 个坐标的某些连续可微函数。

习　题

1. 设 $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$, 对每个函数回答下列问题：

(a) 其逆在哪些点 x 是可导的？

(b) 在 0 点的某个邻域上函数是 1:1 的吗？

(c) 其象是 R^1 的开集吗？

(d) 关于反函数的可微性你能够说些什么(它何处有定义)?

2. 设 $f(x)=x^4\sin\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, 和 $f(0)=0$.

(a) 证明 f 属于实直线上 C^1 类函数。

(b) 证明 f 的值域是开集，但 f 在 0 的任一邻域上不是 1:1 的。

3. 证明，若 f 是一个实直线上 C^1 类实值函数，并且 f 是局部 1:1 的，则象 $f(R)$ 是开集，并且 f 是 1:1 的。

4. 设 f 是 R^n 内原点的某个邻域上的 C^1 类函数，并且在集 $\{x; x_1=0\}$ 上 $f(x)=0$。证明 $f(x)=x_1 g(x)$，其中 g 在原点的某个邻域内连续。

5. 在逆映射定理的假设下，证明：如果 F 是 C^k 类的，则 F^{-1} 也是 C^k 类的。

6. 设 F 是从 R^2 到 R^2 内的映射：

$$F(x, y)=(x, x^2+y^2).$$

(a) F 的象是什么?

(b) 矩阵 $F'(x, y)$ 是什么?

(c) 在那种点 (x, y)，F 是局部 1:1 的?

7. 设 F 是从 R^2 到 R^2 内的映射：

$$F(x, y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$$

(a) 证明 $(DF)(x, y)$ 在任何点 (x, y) 可逆。

(b) 证明 F 是开映射。即，对每个开集 U，$f(U)$ 是开集。

(c) 证明 F 不是 1:1 映射。

(d) 象 $F(R^2)$ 是什么?是否存在某个开集 U，使得 F 将 U 1:1 地映射到 $F(R^2)$ 上。

8. 参见 8.4 节习题 7，利用逆映射定理证明，若

$$U\xrightarrow{f} C$$

是一个复解析函数，则 f^{-1} (在它有定义的地方)是一个复解析函数。

9. 考虑 R^2 上实值函数

$$f(x, y)=x^2+y^2-5.$$

在 (2.1) 的某个邻域内隐函数定理告诉我们什么? 在 $(\sqrt{5}, 0)$ 的某个邻域内呢?

10. 设我们所讨论的每一个函数都是 C^1 类的，并且从方程

$$f(x, y, z)=0,\quad h(x, y, z)=0$$

中能够将 y 和 z 解为 x 的函数，$\frac{dy}{dx}$ 是什么？

11. 假设隐函数定理成立。利用它证明逆映射定理。(提示：考虑 $G(x, y)=x-F(y)$)。

8.6 变量变换

我们现在转而研究"变量变换"定理，在分析中有时称为代换定理。一维的定理说，设 h 是区间 $[a, b]$ 上的可积函数，我们要计算

$$\int_a^b h(x)dx.$$

令 $x=g(t)$，它是我们给出的一个光滑函数，它把 $[c, d]$ 映射到 $[a, b]$ 上，并且 $g'>0$。那么

$$\int_a^b h(x)dx=\int_c^d h(g(t))g'(t)dt.$$

在高维的情形，代换由映射 $G: R^n \longrightarrow R^n$

$$x_1=g_1(t_1, \cdots, t_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n=g_n(t_1, \cdots, t_n),$$

给出。

严格地说，设我们有

$$U \xrightarrow{G} V,$$

其中

(i) U, V 是 R^n 内的开集。

(ii) G 是 C^1 类的。

(iii) G 将 U 映射到 V 上，并且是 $1:1$ 的。

(iv) 在整个 V 上 $\det G'(x)\neq 0$。

我们要证明的是：若 $h\in L^1(V)$，则 $(h\circ G)\in L^1(U)$，并且

$$\int_V h(y)dy=\int_U h(G(x))|\det G'(x)|dx.$$

当 h 是可测集 E 的特征函数时，这一结论是说

$$m(E)=\int_{G^{-1}(E)}|\det G'(x)|dx.$$

或者，我们可以这样说，若 A 是 U 的可测子集，那么

$$m(G(A))=\int_A |\det G'(x)|dx.$$

引理 1 若 E 是 V 内的一个长方体，则

$$m(E)=\int_{G^{-1}(E)}|\det G'(x)|dx. \tag{8.57}$$

证明 留到以后去证。

引理 2 若引理 1 对某个映射 G 成立，则 G^{-1} 将零测度集映射为零测度集。

证明 作为习题。

引理 3 若引理 1 对某个映射 G 成立，则对每个 $h\in L^1(V)$，函数 $(h\circ G)|\det G'|$ 在 $L^1(U)$ 内，并且

$$\int_V h(y)dy=\int_U (h\circ G)(x)|\det G'(x)|dx. \tag{8.58}$$

证明 由引理 1 容易看出，(8.58)对阶梯函数(即长方体的特征函数的有限线性组合)成立。对 $h\in L^1(V)$，我们能够找到一列 $\{h_k\}$，使得

(i) 每个 h_k 是一个阶梯函数

(ii) $\int_V |h-h_k|\to 0$.

(iii) $\lim\limits_{k\to\infty} h_k(y)=h(y)$, a.e.

由(ii)得出

$$\lim_{j,k\to\infty}\int_V |h_j-h_k|=0.$$

现在 $|h_j - h_k|$ 也是阶梯函数，对它们应用(8.58)，我们得到

$$\lim_{j,k\to\infty}\int_U |h_j(G(x)) - h_k(G(x))|\,|\det G'(x)|\,dx = 0.$$

如果我们设

$$U_k(x) = h_k(G(x))|\det G'(x)|,$$

则 $U_k \in L^1(U)$，并且

$$\lim_{j,k\to\infty}\int_U |U_j(x) - U_k(x)|\,dx = 0.$$

同样由引理 2 有

$$\lim_{k\to\infty} U_k(x) = h(G(x))|\det G'(x)|,\ \text{a.e.}$$

于是，$(h\circ G)|\det G'|$ 在 $L^1(U)$ 内，并且

$$\int_U h(G(x))|\det G'(x)|\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_U U_k(x)\,dx$$

$$= \lim_{k\to\infty}\int_V h_k(y)\,dy = \int_V h(y)\,dy.$$

现在我们来证明下面的定理

定理 10 设 U, V 是 R^n 内的开集，又设 G 是一个映射

$$U \xrightarrow{G} V,$$

使得

(i) G 是 C^1 类函数。

(ii) G 是 1:1 的。

(iii) $\det G'(x) \neq 0$, $x \in U$。

如果 $h \in L^1(V)$，则 $(h\circ G)\det G'$ 在 $L^1(U)$ 内，并且

$$\int_V h(y)\,dy = \int_U h(G(x))|\det G'(x)|\,dx.$$

关于证明，我们要注意这样一些事实。

(a) 当 $n = 1$ 时，定理成立。

(b) 对任何给定的 G，我们能证明对任何长方体 $E \subset V$，有

(8.59) $$m(E)=\int_{G^{-1}(E)}|\det G'(x)|\,dx,$$

而定理就可以由此获得。

我们还要注意：

(c) 只要对满足下列条件的长方体E和映射G来验证(8.59)就可以了。这些条件是：

在 $G^{-1}(E)$ 上，$\det G'>0$，

在 $G^{-1}(E)$ 上，D_1g_1 有恒定的符号。

在我们的定理中，这些条件是满足的，为了看出这一点，我们用网络将开集V划分为许多长方体。我们要弄清楚，当每个长方体E充分小时，$\det G'$ 在 $G^{-1}(E)$上有恒定的符号，在 $\det G'\neq 0$ 的任一点，某个偏导数 D_ig_j 必须不等于零，因此我们能够选取长方体足够小，使得在 $G^{-1}(E)$ 上 $\det G'$ 有恒定的符号，并且偏导数 D_ig_j 也在这个集上有恒定的符号。重新排列（某些）坐标的顺序，我们就可以认为(c)中条件是满足的。因此，(c)就是我们必须加以考虑的唯一的情形。

现在，我们利用归纳法来证明$n>1$时的结论。当$n=1$时，我们有这一定理，现在我们要证明，如果定理对$n-1$成立，则引理1对n成立，为此，取长方体E和映射G都如(c)中所说那样。

我们定义映射F

$$G^{-1}(E)\xrightarrow{F}R^n$$

为

$$F(x_1,\cdots,x_n)=(g_1(x_1,\cdots,x_n),x_2,\cdots,x_n).$$

(见图33)我们将在$n-1$维内应用定理，

一次应用于映射 $G\circ F^{-1}$

一次应用于映射 F^{-1}。

当然，这些映射都是从R^n到R^n内的，然而，每一个都不依赖于某

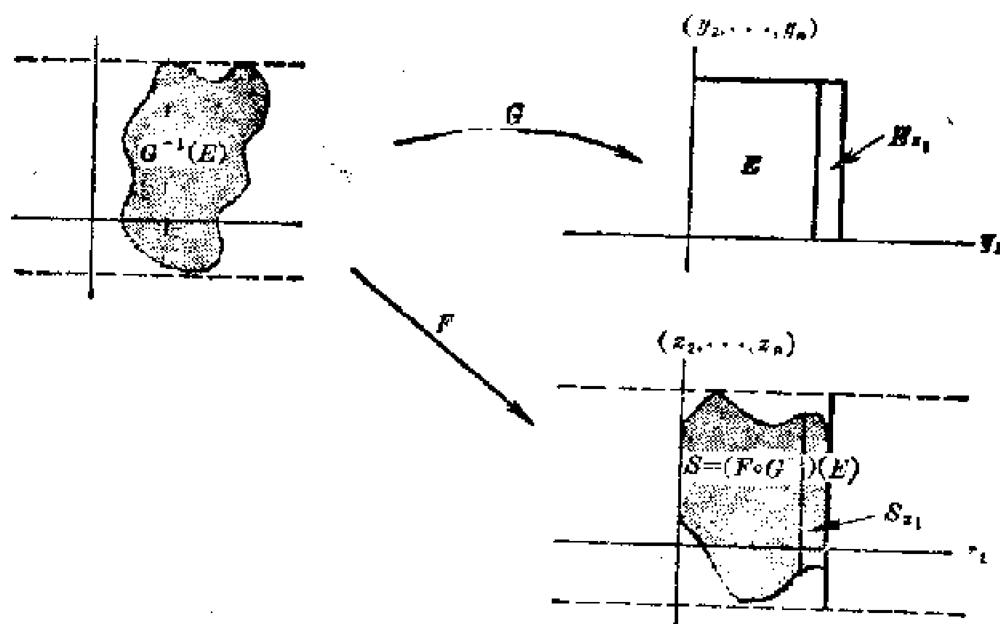


图 33

一个变量。

考察 F^{-1}:

$$S \xrightarrow{F^{-1}} G^{-1}(E),$$

为什么 F 是 1:1 的映射，以及如何定义 F^{-1}? 让我们看一下，若 $z\in S$，则

$$F^{-1}(z_1, \cdots, z_n)=(x_1, z_2, \cdots, z_n),$$

其中

$$z_1=g_1(x_1, z_2, \cdots, z_n).$$

这是有意义的。因为，如果我们固定 $z_2, \cdots, z_n$，那么"$D_1 g_1$ 有恒定的符号"这一条件告诉我们 g_1 在线段 $\{x; x_j=z_j, j=2, \cdots, n\}$ 上是1:1的。

现在 F 不依赖于 $x_2, \cdots, x_n$，所以 1 维的定理告诉我们有关 F 和 F^{-1} 的某些事实。我们感兴趣的是 F^{-1}。假定我们固定 $z_2, \cdots, z_n$，考虑 1 维映射 g:

$g(z_1)=F^{-1}(z_1, \cdots, z_n)$的第一个坐标$=t$,

其中

$$g_1(t, z_2, \cdots, z_n) = z_1.$$

我们知道

$$\int h(t)dt = \int h(g(t))|g'(t)|dt.$$

现在

$$(F^{-1})'(z) = \begin{bmatrix} D_1(F^{-1})_1 & D_2(F^{-1})_1 & \cdots & D_n(F^{-1})_1 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$\det(F^{-1})'(z) = g'(x_1).$$

这样就够了。现在,我们考察映射 $G\circ F^{-1}$

$$(G\circ F^{-1})(z_1, \cdots, z_n) = (y_1, \cdots, y_n),$$

这里

$$y_1 = z_1,$$

$$y_j = g_j(x_1, z_2, \cdots, z_n),$$

并且 x_1 是由

$$g_1(x_1, z_2, \cdots, z_n) = z_1$$

所确定的。所以 $G\circ F^{-1}$ 使第一个坐标保持不变。这就是定义 F 的一个要点,或者说,$G\circ F^{-1}$ 如同一个 R^{n-1} 上的映射。

特别地,如果我们固定 z_1,那么集

$$S_{z_1} = \{z\in S;\ \pi_1(z) = z_1\}$$

被 $G\circ F^{-1}$ 映射到集

$$E_{z_1} = \{y\in E;\ y_1 = z_1\}$$

上,这表明利用 $n-1$ 维的定理,我们就可以计算

$$m(E_{z_1}) = \int_{S_{z_1}} |\det H'_{z_1}(z_2, \cdots, z_n)|dz_2\cdots dz_n,$$

其中 H_{z_1} 是映射

$$S_{z_1} \xrightarrow{H_{z_1}} E_{z_1},$$

$$H_{z_1}(z_2, \cdots, z_n) = H(z_1, \cdots, z_n) = (G \circ F^{-1})(z_1, \cdots, z_n).$$

这就是说 $H = G \circ F^{-1}$. 然而，我们如何求 H'_{z_1} 呢？这是容易的。

$$H = (h_1, \cdots, h_n),$$

$$h_1(z_1, \cdots, z_n) = z_1,$$

$$H'(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 h_2 & \cdots & D_n h_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & D_2 h_n & \cdots & D_n h_n \end{bmatrix},$$

$$H'(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & H'_{z_1}(z_2, \cdots, z_n) & \\ 0 & & & \end{bmatrix}.$$

所以 $\det H'_{z_1}(z_2, \cdots, z_n) = \det H'(z)$. 于是

$$m(E_{z_1}) = \int_{S_{z_1}} \det H'(z) dz_2 \cdots dz_n.$$

现在

$$m(E) = \int m(E_{z_1}) dz_1 = \int dz_1 \int_{S_{z_1}} \det H'(z) dz_2 \cdots dz_n$$

$$= \int_S \det H' dz_1 \cdots dz_n.$$

因为

$$H = G \circ F^{-1},$$

$$H'(z) = G'(F^{-1}(z))(F^{-1})'(z).$$

于是

$$m(E) = \int_S \det G'(F^{-1}(z)) \det(F^{-1})'(z) dz.$$

将 1 维的定理应用于 F^{-1}，如同刚才将它应用于 $G \circ F^{-1}$ 那样，我们得

$$m(E)=\int_{G^{-1}(E)}\det G'(x)dx.$$

系 若L是从R^n到R^n内的线性变换，则对R^n内的每一个可测集S，其象集$L(S)$是可测的，并且它的测度是$m(L(S))=|\det L|m(S)$。

证明 若L是非奇异的，这时定理中的$G=L$，应用定理，那么$\det G'$等于$\det L$，它是一个常数，若L是奇异的，那么象$L(R^n)$是R^n的一个真子空间，因而其测度为0，这时，结论成立是平凡的。

这个系比变量变换定理更基本，它也可以用其他方法直接证明，然后再用它来证明定理10，并进而证明更一般的结果。

例7 一个基本的例子是极坐标。读者可能在微积分中已经熟悉它了。设

$$U=\{(r,\theta);\ r>0,\ 0<\theta<2\pi\},$$

$$G(r,\theta)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta),$$

则G是1:1的，并且将U映射到

$$V=R^2-\{(x,0);\ x\geqslant 0\}$$

上，我们有

$$G'(r,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix},$$

$$\det G'(r,\theta)=r.$$

因为R^2-V是平面内的零测度集，所以$L^1(V)=L^1(R^2)$。定理10指出，若f是R^2上的一个可积函数，则$f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$在$U$上可积，并且

$$\int_{R^2}f=\int_U f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)r\,dr\,d\theta,$$

(a) 设

$$f(x, y)=\frac{1}{x+iy}, \quad x^2+y^2\neq 0.$$

则 f 是在 R^2 上可测函数，并且因为

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)|=\frac{1}{r},$$

所以 f 在平面的任何有界子集上可积：

$$\int_{\{|z|\leq r_0\}}|f|=\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}dr\,d\theta=2\pi r_0<\infty.$$

(b) 读者将会熟悉

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$$

的计算。显然，因为对适当大的 x，有 $e^{-x^2}<e^{-|x|}$，所以 $f(x)=e^{-x^2}$ 在 R^1 上可积。注意到(由于 $f\geq 0$)

$$\left(\int f\right)^2=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=\int_{R^2}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\infty}re^{-r^2}dr\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{\infty}\right\}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta=\pi.$$

于是 $\int f=\sqrt{\pi}$。

习　题

1. 利用变量的适当变换，计算

$$\int_0^1\int_0^1\frac{1}{x+y}\,dx\,dy.$$

并用 Fubini 定理或变量变换定理说明每一步的正确性。

2. 证明本节的引理 2。

3. 利用 R^3 内的球面坐标 (r, φ, θ)，对集 E 的测度（体积）我们得到公式

$$m(E)=\int_B f(r,\ \varphi,\ \theta)dr\,d\varphi\,d\theta.$$

找出 $f(r,\ \varphi,\ \theta)$。

4. 球

$$B(0;r)=\{x\in R^4;\ |x|\leqslant r\}$$

的测度是什么?

5. 求

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz.$$

*6. 设 G 是一个 C^1 类的映射，它把开集 $U\subset R^n$ 映射到 R^n 内，又设 $S=\{x\in U;\ \det G'(x)=0\}$。证明($S$ 的象)集 $G(S)$ 是一个零测度集。

附录 集论初步

A.1 集和函数

先介绍一些基本术语。我们常常要谈到集，我们不想去定义什么是集，而只是说集是某种对象的全体。在各种不同的场合，我们把集叫做集体、类或族。集S中的对象叫做S的成员、元素或S的点。若x是S的元素，写作$x\in S$。我们往往可以通过给出集中元素的一种规则来规定一个集。为了表明这种规则，一种简便的记号是$\{x;\cdots\}$，读作"满足…的一切x所成的集"。

集是简单而又基本的概念，经验指出，大多数人都能迅速了解这个抽象概念的含义。然而，随意使用集的术语，却会产生问题和迷惑，但这不是用几句话可以说清楚的。我们将试图回避这种难处，因而在本书中将不涉及这一点。如果读者碰到一个集而感到由于我们没有给出一个好的定义规则，以致不能确定每一个x是不是这个集的元素，那末他或她将可以自由地对此提出质疑。

如果S的任一元素是集T的元素，则集S就叫做T的**子集**。若S是T的子集，写作$S\subset T$。若$S\subset T$，并且$S\neq T$，则S叫做T的**真子集**。注意，任一集是它自身的子集。没有元素的集叫做**空集**，记作$\varnothing$。空集是任一集的子集。

集S和集T的**并**是集$S\cup T$，它是由S或T的元素所组成的：

$$S\cup T=\{x;\ x\in S\text{ 或 }x\in T\}.$$

S和T的**交**是集$S\cap T$，它由既在S中又在T中的元素所组成：

$$S\cap T=\{x;\ x\in S\text{ 和 }x\in T\}.$$

我们总有

$$S\cap T\subset S\cup T.$$

也就是，"或"并不妨碍"和"的可能性。

如果集S和集T的交是空集：

$$S\cap T=\varnothing,$$

集S、T叫做(互相)**不相交**。

T 关于 S 的余是

$$S-T=\{x\in S;\ \ x\notin T\}.$$

如果在我们所考虑的问题中，存在一个"公共的"集 S，我们感兴趣的都是这个集 S 的子集，这时 T 关于 S 的余就简单地叫做 T 的余。

S 和 T 的 **Cartesian 积** (直积) 是集 $S\times T$，设 s 在 S 中，t 在 T 中，则 $S\times T$ 是一切(有序)对 $(s,\ t)$ 所组成：

$$S\times T=\{(s,\ t);\ s\in S,\ t\in T\}.$$

数学中最重要的概念或许是"函数"。一个函数的构成是：

(i) 一对集 $D,\ Y$；

(ii) 一个规则 f，对 D 中的任一 x 对应着 Y 中的一个元素 $f(x)$。

这样，我们就称 f 是从 **D 到 Y 中的一个函数**，并写作

$$D\xrightarrow{f}Y.$$

D 叫做 f 的**定义域**，Y 叫做 f 的**值域**. 函数也叫做变换、映射或算子。

其实，我们的定义不是在严格意义下给出的，因为在定义中使用了"规则"这样的词，而什么是规则呢？我们将讨论函数图象来进一步阐明函数的概念。函数 f 的**图**是直积 $D\times Y$ 的子集，把此子集记作

$$G=\{(x,\ f(x));\ \ x\in D\}.$$

Cartesian 积 $D\times Y$ 常有许多子集，其中少部分是从 D 到 Y 中函数的图. 若 G 是 $D\times Y$ 的子集，何时 G 才是从 D 到 Y 中的函数图象呢？回答是：当且仅当对每一个 $x\in D$，在 Y 中正好有一个 y，使 $(x,\ y)\in G$. 某些人就考虑给出这一子集的特征作为函数的定义。

设 f 是函数

$$D\xrightarrow{f}Y.$$

若 T 是 Y 的子集，**T 在 f 下的逆象**是

$$f^{-1}(T)=\{x\in D; f(x)\in T\}.$$

f 的**等值面**是点 $y\in Y$ 的逆象：

$$\{x; f(x)=y\}.$$

(实际上，只有当该集非空时才叫做等值面.) 一个函数若只有一个等值面就是常数。

若 A 是 D 的子集，f 在 A 上的值所组成的集叫做 **A 在 f 下的象**：

$$f(A)=\{y\in Y; y=f(x)\ \text{对某一}\ x\in A\}.$$

象集 $f(D)$，也就是 f 的一切值的集，也叫做 f 的**象**。如果 f 的象是 Y，就说 f 是从 D 到 Y **上**的函数(有时也说"f 是到上的")。

对函数 f 如果

$$f(x_1)\neq f(x_2),\quad x_1\neq x_2.$$

函数 f 叫做 1:1 (读作一一对应)。换句话说，如果由 $f(x_1)=f(x_2)$ 可推出 $x_1=x_2$。假如 f 是 1:1 的，而且是到上的(定义域到值域上的函数)，则存在**逆函数**如下：

$$D\xleftarrow{f^{-1}}Y,$$

$f^{-1}(y)$ 是(唯一)点 $x\in D$，使 $y=f(x)$。从 D 到 Y 上的一个 1:1 函数也叫做 D 的元素和 Y 的元素之间的**一一对应**。

若

$$D\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z,$$

它定义了**复合**

$$D\xrightarrow{g\circ f}Z.$$

其中

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

例如，若 f 是 1:1 的，并且是定义域到值域上的函数，我们有

$$D\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{f^{-1}}D$$

复合 $f^{-1}\circ f$ 是 D 上的**恒等函数** I：

$$I(x)=x.$$

类似地，$f\circ f^{-1}$ 是 Y 上的恒等函数。

设 Y 是集，Y 中的(元素的)**序列**是从正整数集

$$Z_+=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$$

到集 Y 中的函数。Y 中的序列常写作 $\{y_n\}$，这是函数

$$Z_+\xrightarrow{f}Y$$

而 $f(n)=y_n$。

有时也对集的序列作些讨论。若 $\{S_n\}$ 是集序列，我们作并和交

$$\bigcup_n S_n=\{x;\ x\in S_n\ 对某一\ n\},$$

$$\bigcap_n S_n=\{x;\ x\in S_n\ 对任一\ n\}.$$

有时也讨论不是以正整数为足标的集族，如集族 $\{S_\alpha;\alpha\in A\}$，它表示对任一 $\alpha\in A$，有一个集 S_α。记号

$$\bigcup_\alpha S_\alpha,\quad \bigcap_\alpha S_\alpha$$

的含义是清楚的。

我们采用**选择公理**的观点。选择公理是：若 $\{S_\alpha;\alpha\in A\}$ 是非空且不相交的集族：

$$S_\alpha\neq\varnothing,$$

$$S_\alpha\cap S_\beta\neq\varnothing,\quad \alpha\neq\beta,$$

则存在一个集，它是由每一个 S_α 中正好取一个元素组成的。（粗略地说，有一种方法，可以从每一个集中选择一个元素。）由于下面的理由，我们把它叫做一个公理（假定）。它下了什么结论，它是说，给定 $\{S_\alpha;\alpha\in A\}$，存在一个规则（函数）去选取一个元素 $x_\alpha\in S_\alpha$。但是，确切地说这规则是什么呢？由于我们不能确切地说出来，因此只是假定有一个规则而已。

A.2 势

对于一个集有多少元素这个问题，无限集比有限集要复杂得多。人们往往把正整数集 $\{1, 2, 3, \cdots\}$ 看作比偶正整数集 $\{2, 4, 6, \cdots\}$ 有更多的元素，然而，如果我们这样编排集：

$$1\ 2\ 3\ 4\cdots$$

$$2\ 4\ 6\ 8\cdots$$

把第一个集看作比第二个集有更多的元素就难使人相信了。我们可以从这点学起：如果在无限集中希望比较两个集所含元素的多少，至少对“多于”的直觉观念应有所描述。实际上在无限集情况下，直觉的观念是被推翻了。例如按直观，集 $\{1, 2, 3, \cdots\}$ 比集 $\{2, 4, 6, \cdots\}$ 有更多的元素，即若 S 是 T 的真子集，则 T 有更多元素。但现在，我们面对的事实是偶整数集和整数集的元素是一样多的。

一个集有多少元素，和这个问题有关的事我们不打算作彻底的讨论，我们只打算谈一下何时两个集有相同数目的元素。设 S 和 T 是两个集，如果在 S 的元素和 T 的元素之间存在一个 1:1 对应，那么就说 S 和 T **有相同的势**。S 和 T 有相同的势，这意味着存在一个函数

$$S\xrightarrow{f}T$$

$f(S)=T$，并且函数 f 是 1:1 的。

关于势最基本的事实是：假如 S 和 T 是集，存在从 S 到 T 中的 1:1 的函数，也存在从 T 到 S 中的 1:1 函数，则 S 和 T 有相同的势。直观地，若 T 至少和 S 有一样多的元素，反过来也一样，则它们有同样数目的元素。我们不停留在证明这个事实上（它是很费脑筋的习题）。我们只限于讨论一些特殊情况。

如果集 S（是空集或）存在正整数 n 使 S 和 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 有相同的势，S 就是**有限集**。一个集如果不是有限集就是**无限集**。任何一个无限集都显示出如整数集和偶整数集那样的相同现象，即任一无限集可以和它的真子集建立一一对应。如果集 S 是有限集或它和正整数集有相同的势，集 S 称为**可列集**。可列的术语起源如下。

引理 非空集 S 是可列的，当且仅当存在从正整数集到 S 上的函数，也就是当且仅当存在序列 $\{x_n\}$，使得

(i) 对每一 n，$x_n\in S$；

(ii) 若 $x\in S$，则对某一 n，$x=x_n$。

证明 若 S 是可列集但不是有限集，我们有一个序列 $\{x_n\}$，使得若 $x\in S$，则正好只有一个 n 使 $x=x_n$。若 S 是有限的，则 $S=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$。对 $k>n$ 定义 $x_k=x_1$，$\{x_k\}$ 就是我们所需要的序列。

所以，非空可列集的元素可以排成 $x_1, x_2, x_3, \cdots$，即非空可列集是序列的象。

定理 A.1 可列集的任一子集是可列的。

证明 假如 S 是可列的并且 T 是 S 的子集，设 T 是非空的，则 S 是非空的，并且有序列 $\{x_n\}$，使 S 是它的象：

$$S=\{x_n;\ n\in Z_+\}.$$

设 n_1 是使得 $x_k\in T$ 的最小正整数 k。设 n_2 是使得 $k>n_1$ 并且 $x_k\in T$ 的最小正整数，如此继续做下去，可得到正整数 $n_1<n_2<n_3<\cdots$，而 n_j 是满足 $k>n_{j-1}$ 和 $x_k\in T$ 的最小正整数。令

$$t_j=x_{n_j}$$

显然 T 是序列 $\{t_n\}$ 的象。

系 集 S 是可列的当且仅当 S 和某一正整数子集有相同的势。

定理 A.2 设 $\{S_n\}$ 是可列集的序列，则并

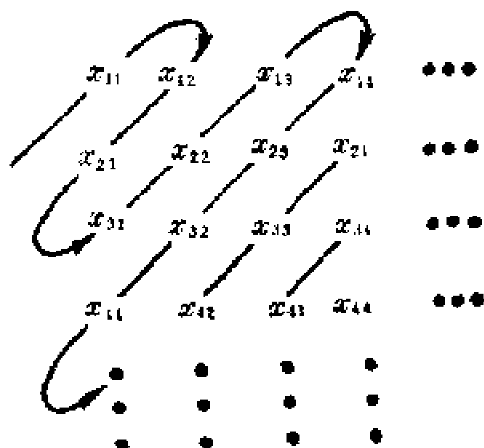
$$\bigcup S_n$$

是可列集。

证明 显然，我们可以设一切 S_n 都非空。于是集 S_n 的元素可以排成

$$S_n=\{x_{nk};\ k\in Z_+\}.$$

于是我们可以把并集的元素按下列方式排列



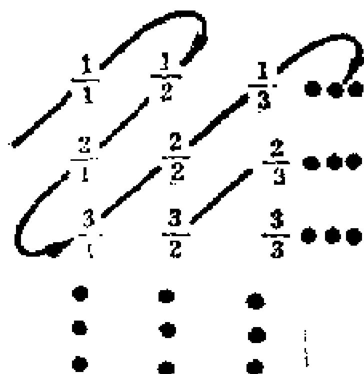
系 一切有理数所成的集是可列集。

证明 有理数可写成 m/n，其中 m 是整数而 n 是正整数。对每一 n，令 S_n 是一切数 m/n 的集，这里 n 是一个整数。整数集是可列的，由定理 A.2 或按下列方式排列

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \cdots \end{array}$$

得到集 S_n 的并也是可列的。

读者(今后)将十分熟悉上述这个系的本质，它实际上就是正有理数集可列这一事实。而正有理数集可列也可按下列方式排列



得出。

定理 A.3 实数集(在一条直线上的点)是不可列集(不是可列的)。

证明　只要证明实数 x 的集，$0\leqslant x\leqslant 1$，是不可列集就行了。在区间中的任一 x 可以用小数表示

$$x=0.a_1a_2a_3\cdots,\quad 0\leqslant a_k\leqslant 9.$$

在这表示中唯一不明确的地方是由 9 的无限循环造成的。小数

$$0.a_1a_2\cdots a_n 999\cdots$$

和小数

$$0.a_1a_2\cdots(a_n+1)000\cdots$$

表示同一个数，这是一个技术细节。

设有 $0\leqslant x\leqslant 1$ 中的点 x_n 的序列。我们要证明序列 $\{x_n\}$ 的象不能充满区间(因此，区间不是可列集。)。给定序列 $\{x_n\}$，写出小数表示：

$$x_1=0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$$
$$x_2=0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$$
$$x_3=0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

我们将要取出一个数 x，$0\leqslant x\leqslant 1$，它不在 x_1，x_2，x_3，… 中，我们写出 x 的小数表示。对每一 n，选择整数 a_n，$0\leqslant a_n\leqslant 9$，使 $a_n\neq a_{nn}$。令

$$x=0.a_1a_2a_3\cdots$$

则 $x\neq x_n$。这是因为 x 的第 n 个数字不同于 x_n 的第 n 个数字。当然，仅仅由于小数表示中的数字不同还不能推出小数不同（如 9 的循环），因此，应选择数字 a_n，使 $0\leqslant a_n\leqslant 9$，并且 $|a_n-a_{nn}|\geqslant 2$，则对每一 n，必然有 $x\neq x_n$。我们已作出了一个 x，$0\leqslant x\leqslant 1$，但是它不在 x_1，x_2，x_3，…中。这说明这样一个序列不能充满区间。

于是，虽然有理数集的势和正整数集的势相同，但与实数集的势却不相同，实数集有更大的势。我们有理由问：在实数集中是否存在一个子集，它是不可列集，但其势和实数全体所成集的势不相同？这是一个极其复杂的问题，它使数理逻辑学家思索了好多年，几年以前才完全解决。不明确的回答是：你既不能证明存在这样的集，也不能证明没有这样的集——除非，正如我们所知道的那样，数学在逻辑上是不协调的。

符 号 表

参 考 书

按照参考书的水平分成三组。

第 一 组

Courant, R., *Differential and Integral Calculus*, Vols. I, II. New York: Interscience, 1937.

(有中译本:《柯氏微积分学》上卷、下卷。中华书局印行。1947年,根据德文版译出。)

Seeley, R., *An Introduction to Fourier Series and Integrals*. New York: Benjamin, 1966.

Toeplitz, O., *The Calculus, a Genetic Approach*. Chicago: University of Chicago Press, 1963.

第 二 组

Bartle, R. G., *The Elements of Real Analysis*. New York: Wiley, 1964.

Buck, R. C., *Advanced Calculus*. New York: McGraw-Hill, 1956.

Kaplan, W., *Advanced Calculus*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1953.

Landau, E. G. H., *Foundations of Analysis*. New York: Chelsea, 1951.

Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1964.

(有中译本:《数学分析原理》上册,人民教育出版社,1979年。)

第 三 组

Courant, R., and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1. New York: Interscience, 1953.

(有中译本:《数学物理方法》卷 I, 科学出版社, 1958 年)

Dym, H., and H. P. McKean, *Fourier Series and Integrals*. New York: Academic Press, 1972.

Rudin, W., *Real and Complex Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1966.

Titchmarsh, E. C., *The Theory of Functions*, 2nd ed. New York: Oxford University Press, 1939.

(有中译本:《函数论》, 科学出版社, 1962 年)

索　引

一　画

二　画

三　画

四　画

五 画

六　画

七 画

八 画

九 画

十 画

十 一 画

十二画

十三画

十四画

十五画

十 六 画

十 八 画